Seminario di TEORIA DEI CONTROLLI : Problemi ~~stocastici~~ 1
stocastici di controllo ottimale : teorie affrontate. ~~[illegible]~~
(ad orizzonte finito)

PROBLEMI DETERMINISTICI DI CONTROLLO OTTIMALE

(MARCO TARSIA) ↔ [J. YONG, X.Y. ZHOU]

I DATI ASSEGNATI: $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $T \in (0,+\infty)$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$, (U,d) spazio metrico (ES. $U \subseteq \mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$));

$b : [0,T]_t \times \mathbb{R}^m_x \times U_u \to \mathbb{R}^m$, $f : [0,T]_t \times \mathbb{R}^m_x \times U_u \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^m_x \to \mathbb{R}$

mappe misurabili.

IL SISTEMA DI CONTROLLO: (ad orizzonte finito)

(forward ODE)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b(t, x(t), u(t)), & \text{q.o. } t \in [0,T] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

(almeno in senso debole)

nelle incognite $u(\cdot) : [0,T] \to U$ e $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,; u(\cdot)) : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ misurabili.
(controllo) ($\cancel{C([0,T];U)}$) (traiettoria di stato) ($C([0,T];\mathbb{R}^m)$) (continue) (cammini)

IL FUNZIONALE COSTO: (o "disutilità") (misura di performance)

$$J(u(\cdot)) := \int_0^T f(t, x(t), u(t))\,dt + h(x(T)) \quad (\in \mathbb{R})$$

al variare di $u(\cdot) : [0,T] \to U$ misurabile e dove $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,; u(\cdot))$.

I CONTROLLI AMMISSIBILI: i controlli $u(\cdot) : [0,T] \to U$ misurabili tali che esiste una ed una sola soluzione $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,; u(\cdot))$ del sistema di controllo ~~ed~~ e tale che inoltre risulti:
$t \mapsto f(t, x(t), u(t)) \in L^1(0,T;\mathbb{R})$.

LE COPPIE AMMISSIBILI: le coppie $(x(\cdot), u(\cdot))$ con $u(\cdot)$ controllo ammissibile e $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,; u(\cdot))$.

NOTAZIONE: denotiamo con "$\mathcal{V}_{ad}[0,T]$" l'insieme dei controlli ammissibili (dipendono da tutti i dati assegnati)

IL PROBLEMA DI CONTROLLO OTTIMALE: "Problema (D)": minimizzare $J(\cdot)$ su $\mathcal{V}_{ad}[0,T]$.

(*) CONVENZIONE: $\inf \emptyset \triangleq +\infty$)   Ipotesi di finitezza: (DEO) $-\infty < \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{V}_{ad}[0,T]} J(u(\cdot)) \; \cancel{< +\infty}$.

I CONTROLLI OTTIMALI: (per il Problema (D)) i controlli $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{V}_{ad}[0,T]$ ~~tali che~~ , ~~posto $\bar{x}(\cdot) \equiv x(\cdot\,;\bar{u}(\cdot))$~~, soluzioni del Problema (D) nel senso che

$$J(\bar{u}(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{V}_{ad}[0,T]} J(u(\cdot)).$$

(Problema (D): "di Lagrange" se $f \equiv 0$; "di Mayer" se $h \equiv 0$; "di Bolza" se $f \not\equiv 0$ e $h \not\equiv 0$.)

LE COPPIE OTTIMALI: (per il Problema (D)) le coppie $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ con $\bar{u}(\cdot)$ controllo ottimale (per il Problema (D)) e $\bar{x}(\cdot) \equiv x(\cdot\,; \bar{u}(\cdot))$.

Notazione: per ogni $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ denotiamo con "$|\cdot|$" la norma euclidea standard $\|\cdot\|_2$ su $\mathbb{R}^N$ e con "$\langle \cdot,\cdot \rangle$" il prodotto scalare standard $\langle \cdot,\cdot \rangle_2$ su $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

LE ~~ASSUNZIONI~~ IPOTESI PER L'ESISTENZA DI UN CONTROLLO OTTIMALE: oltre alle ipotesi di finitezza, (su U, b, f e h)

(DE1) Lo spazio metrico (U,d) è polacco (cioè completo e separabile). (ES. $U \subseteq \mathbb{R}^k$ chiuso)

(DE2) Esistono una costante $L \in (0,+\infty)$ ed un modulo di continuità ("globale") $\bar{\omega} : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tali che, per ~~ogni~~ ciascuna $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u), f(t,x,u), h(x)$, risulti

$$\begin{cases} |\varphi(t,x,u)-\varphi(t,\hat{x},\hat{u})| \le L|x-\hat{x}| + \bar{\omega}(d(u,\hat{u})) & \text{per ogni } t\in[0,T],\ x,\hat{x}\in\mathbb{R}^n \text{ e } u,\hat{u}\in U \\ |\varphi(t,0,u)| \le L & \text{per ogni } t\in[0,T] \text{ e } u\in U \end{cases}.$$

(DE3) Per ogni $t\in[0,T]$ e $x\in\mathbb{R}^n$, il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$

$$(b,f)(t,x,U) \triangleq \{(b_i(t,x,u), f(t,x,u))^T_{i=1,\dots,n} \mid u\in U\}$$

è ivi convesso e chiuso. ("condizione di Roxin")

Teorema (Esistenza di un controllo ottimale). Siano assunte le ipotesi (DE0)–(DE3) (cioè (DE0), (DE1), (DE2) e (DE3)). Allora il Problema (D) ammette un controllo ottimale.

OSSERVAZIONE. Sotto le ipotesi (DE1) e (DE2) ((D1)) ((D2)), ogni controllo è ammissibile (*) (ed anzi non è necessaria la completezza di (U,d)).

Notazione: per ogni $N,M\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ed ogni $F(x):\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^M$ di classe C^1 su $\mathbb{R}^N$, denotiamo con "$F_x(\cdot)$" $\in\mathbb{R}^{M\times N}$ la matrice jacobiana di $F(\cdot)$.

LE IPOTESI PER LE CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ DI PONTRYAGIN: (su U, b, f e h)

(D1) Lo spazio metrico (U,d) è separabile.

(D2) $\equiv$ (DE2)

(*) e vale (D2) solo per $\varphi=b$ con la sola crescita lineare in x.

(*) (D4) Esiste $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ tale che U sia un corpo convesso di $\mathbb{R}^k$ (un sottoinsieme convesso e a parte interna non vuota di $\mathbb{R}^k$). Inoltre b e f sono localmente lipschitziane nelle variabili $u\in U$.

(D3) Le mappe $b(t,x,u)$, $f(t,x,u)$ e $h(x)$ sono tutte di classe C^1 nelle variabili $x\in\mathbb{R}^n$. Inoltre esiste un modulo di continuità $\bar{\omega}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ tale che, per ciascuna

$\varphi(t,x,u) = b(t,x,u),\ f(t,x,u),\ h(x)$, risulti

$$|\varphi_x(t,x,u)-\varphi_x(t,\hat{x},\hat{u})| \le \bar{\omega}(|x-\hat{x}|+d(u,\hat{u})) \quad \text{per ogni } t\in[0,T],\ x,\hat{x}\in\mathbb{R}^n \text{ e } u,\hat{u}\in U$$

e, in alternativa: ciò vale solo per $\varphi(t,x,u)=b(t,x,u)$ nelle x (*) mentre $f(t,x,u)$ e $h(x)$ sono di crescita polinomiale.

LA FUNZIONE HAMILTONIANA (DEL PROBLEMA (D)): $H(t,x,u,p):[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, (dipende da b e f)

$$H(t,x,u,p) \triangleq \langle p, b(t,x,u)\rangle - f(t,x,u).$$

LE VARIABILI AGGIUNTE E LE EQUAZIONI AGGIUNTE (DEL PROBLEMA (D)): assumendo che le mappe $b(t,x,u)$, $f(t,x,u)$ e $h(x)$ siano tutte di classe C^1 nelle variabili $x\in\mathbb{R}^n$, per ogni coppia ammissibile $(x(\cdot),u(\cdot))$, una "variabile aggiunta" associata a $(x(\cdot),u(\cdot))$ è una mappa $p(\cdot):[0,T]\to\mathbb{R}^n$ continua che soddisfi l'"equazione aggiunta". $\equiv p(\cdot;(x(\cdot),u(\cdot)))$

(backward ODE) (retrograda) (una backward ODE equivale ad una ODE forward a meno di un'inversione temporale)

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -b_x(t,x(t),u(t))^T p(t) + f_x(t,x(t),u(t)), & \text{q.o. } t\in[0,T], \\ p(T) = -h_x(x(T)) & \end{cases}.$$

(ecco h)

OSSERVAZIONE. È $H_p\equiv b$, mentre, sempre assumendo b,f,h C^1 nelle x, è $H_x\equiv b_x^T p - f_x$.

LE TRIPLETTE ~~AMMISSIBILI~~ OTTIMALI: le triplette $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot))$ con $(x(\cdot),u(\cdot))$ coppia ~~ammissibile~~ ottimale e $p(\cdot)\equiv p(\cdot;(x(\cdot),u(\cdot)))$ una variabile aggiunta associata a $(x(\cdot),u(\cdot))$.

IL SISTEMA HAMILTONIANO (DEL PROBLEMA (D)): assumendo sempre che b, f e h siano C^1 nella x, è il sistema accoppiato ~~che caratterizza le~~ (soddisfatto dalle) triplette ammissibili $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot))$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b(t, x(t), u(t)) = H_p(t, x(t), u(t))p(t)), & \text{q.o. } t \in [0,T], \\ \dot{p}(t) = -b_x(t, x(t), u(t))^T p(t) + f_x(t, x(t), u(t)) = -H_x(t, x(t), u(t), p(t)), & \text{q.o. } t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 \\ p(T) = -h_x(x(T)) . \end{cases}$$

(sistema forward-backward)

Teorema (Principio del massimo di Pontryagin). (MP) (Condizione necessaria di ottimalità) Siano assunte le ipotesi (D1)-(D3).

Se esiste una coppia ottimale $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ per il Problema (D), allora esiste ~~[illegible]~~ una variabile aggiunta $p(\cdot) \equiv p(\cdot\,; (\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)))$ associata a $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ tale che la tripletta (ottimale) $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot), p(\cdot))$ soddisfi la Condizione del massimo di Pontryagin:

$$\boxed{H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t)) = \max_{u \in U} H(t, \bar{x}(t), u, p(t))}, \quad \text{q.o. } t \in [0,T] .$$

IL SISTEMA HAMILTONIANO ESTESO (DEL PROBLEMA (D)): assumendo sempre che b, f e h siano C^1 nella x, è il sistema hamiltoniano soggetto alla condizione del massimo di Pontryagin:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = H_p(t, x(t), u(t), p(t)), & \text{q.o. } t \in [0,T], \\ \dot{p}(t) = -H_x(t, x(t), u(t), p(t)), & \text{q.o. } t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \quad p(T) = -h_x(x(T)), \\ H(t, x(t), u(t), p(t)) = \max_{u \in U} H(t, x(t), u, p(t)), & \text{q.o. } t \in [0,T] . \end{cases}$$

Teorema (Condizioni sufficienti di ottimalità). Siano assunte le ipotesi (D1)-(D4).

Supponiamo inoltre che $h(\cdot)$ sia convessa su $\mathbb{R}^n$. Sia data una tripletta ammissibile $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot))$ tale che la mappa $H(t, \cdot, \cdot, p(t))$ risulti concava su $\mathbb{R}^n \times U$ per ogni $t \in [0,T]$. Allora la coppia $(x(\cdot), u(\cdot))$ è ottimale se

$$H(t, x(t), u(t), p(t)) = \max_{u \in U} H(t, x(t), u, p(t)), \quad \text{q.o. } t \in [0,T] .$$

$\boxed{\text{IL FRAMEWORK E LE IPOTESI PER LA PROGRAMMAZIONE DINAMICA DI BELLMAN (DP):}}$ al variare di ogni assegnata coppia $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$,

$\boxed{\text{Problema } (D_{sy}):}$ $\boxed{\text{minimizzare } J(s,y;\cdot) \text{ su } \mathcal{V}_{ad}[s,T]}$, dove con "$\mathcal{V}_{ad}[s,T]$" denoteremo l'insieme delle mappe $u(\cdot) : [s,T] \to U$ ~~continue~~ $u(s;\cdot)\in C^0([s,T];U)$ tale che esiste una ed una sola soluzione $x(\cdot)\equiv x(\cdot\,; s,y,u(\cdot))\in C^0([s,T],\mathbb{R}^n)$ del sistema delle ODE

$$\boxed{\begin{cases}\dot{x}(t) = b(t,x(t),u(t)), & \text{q.o. } t\in[s,T],\\ x(s) = y\end{cases}}$$

(forward ODE)

e tale che inoltre risulti $t\mapsto f(t,x(t),u(t)) \in L^1(s,T;\mathbb{R}^n)$, e dove quindi

$$\boxed{J(s,y;u(\cdot)) \triangleq \int_s^T f(t,x(t),u(t))\,dt + h(x(T))}$$

per ogni $u(\cdot)\in\mathcal{V}_{ad}[s,T]$.

(D1)' $\equiv$ (D1) (separabilità) $(U, b, f\ \text{e}\ h)$

(D2)' Le mappe $b(t,x,u)$, $f(t,x,u)$ e $h(x)$ sono tutte uniformemente continue ed esiste una costante $L\in(0,+\infty)$ tale che, per ciascuna $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u), f(t,x,u), h(x)$, risulti

$$\begin{cases}|\varphi(t,x,u)-\varphi(t,\hat{x},u)| \le L|x-\hat{x}| & \text{per ogni } t\in[0,T],\ x,\hat{x}\in\mathbb{R}^n \text{ e } u\in U\\ |\varphi(t,0,u)|\le L & \text{per ogni } t\in[0,T] \text{ e } u\in U.\end{cases}$$

(D3)' Le mappe $b(t,x,u)$, $f(t,x,u)$ e $h(x)$ sono tutte di classe C^1 nella variabile $x\in\mathbb{R}^n$. Inoltre esiste un modulo di continuità $\overline{\omega} : [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ tale che, per ciascuna $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u), f(t,x,u), h(x)$, risulti

$$|\varphi_x(t,x,u)-\varphi_x(t,\hat{x},u)| \le \overline{\omega}(|x-\hat{x}|) \quad \text{per ogni } t\in[0,T],\ x,\hat{x}\in\mathbb{R}^n \text{ e } u\in U.$$

$\boxed{\text{LA FUNZIONE VALORE (DEL PROBLEMA (D)):}}$ $V(s,y)$, $V : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$

$$\begin{cases}V(s,y) \triangleq \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{V}_{ad}[s,T]} J(s,y;u(\cdot)) & \text{per ogni } (s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n,\\ V(T,y) \triangleq h(y) & \text{per ogni } y\in\mathbb{R}^n.\end{cases}$$

$\boxed{\text{L'EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI-BELLMAN (HJB) (DEL PROBLEMA (D)):}}$

(backward PDE)

$$\begin{cases}-v_t(t,x) + \sup_{u\in U} H(t,x,u,-v_x(t,x)) = 0, & (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n,\\ v(T,x) = h(x), & x\in\mathbb{R}^n.\end{cases}$$

nelle incognite $v(t,x) \in C^{1,1}([0,T]\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ ($\Rightarrow$ il sup è finito)
(e dove H è la hamiltoniana del Problema (D))

Teorema (Principio di ottimalità di Bellman: caso generale e caso liscio). Siano assunte le ipotesi (D1) e (D2)'. Allora la funzione valore $V(s,y)$ del Problema (D) verifica la equazione della programmazione dinamica:

$$V(s,y) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{V}_{ad}[s,T]} \left\{ \int_s^{\hat{s}} f(t, x(t;s,y,u(\cdot)), u(t))\,dt + V(\hat{s}; x(\hat{s};s,y,u(\cdot))) \right\}$$

per ogni $(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ ed ogni $\hat{s}\in[s,T]$.

Inoltre, se $V(s,y)\in C^{1,1}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, allora V è una soluzione forte dell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman del Problema (D):

$$\begin{cases} -V_t(t,x) + \sup_{u\in U} H(t,x,u,-V_x(t,x)) = 0, & (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n, \\ V(T,x) = h(x), & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

(Da cui la "tecnica della verifica" per trovare formalmente un controllo ottimale in forma "FEEDBACK")

Teorema (Di verifica). Siano assunte le ipotesi (D1) e (D2)'. Allora ciascuna soluzione $v(t,x)\in C^{1,1}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ dell'equazione HJB del Problema (D) soddisfa la disuguaglianza

$$v(s,y) \le J(s,y;u(\cdot)) \quad \text{per ogni } (s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n \text{ e } u(\cdot)\in\mathcal{V}_{ad}[s,T].$$

(Cioè $v \le V$)

Inoltre, per ogni $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ ed ogni $\bar{u}(\cdot)\in\mathcal{V}_{ad}[s,T]$, $\bar{u}(\cdot)$ è ottimale per il Problema $(D_{s,y})$ se, e solo se, $\bar{x}(\cdot)\equiv x(\cdot,\bar{u}(\cdot))$ e $\bar{u}(\cdot)$ sono tali che

$$v_t(t,\bar{x}(t)) \equiv \max_{u\in U} H(t,\bar{x}(t),u,-v_x(t,\bar{x}(t))) =$$

$$= H(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),-v_x(t,\bar{x}(t))), \quad \text{q.o. } t\in[s,T].$$

Teorema (Una relazione fra il MP e la DP nel caso liscio). Siano assunte le ipotesi (D1) e (D2)'–(D3)'. Fissiamo $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ e supponiamo che esiste una tripletta ottimale $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot), p(\cdot))$ per il Problema (D_{sy}). Allora valgono le due seguenti proposizioni:

(i) Se $V \in C^{1,1}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, allora

$$\begin{aligned} V_t(t,\bar{x}(t)) &= H(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t), -V_x(t,\bar{x}(t))) = \quad \text{q.o. } t\in[s,T] \\ &= \max_{u\in U} H(t,\bar{x}(t),u,-V_x(t,\bar{x}(t))) \ , \end{aligned}$$

(ii) Se $V\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ e se pure V_{tx} esiste ed è continua, allora

$$V_x(t,\bar{x}(t)) = -p(t) \quad \text{per ogni } t\in[s,T] .$$

PROBLEMI LINEARI-QUADRATICI DETERMINISTICI DI CONTROLLO OTTIMALE. (LQ)

NOTAZIONE: per ogni $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$, ogni $N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ ed ogni $G(\cdot):[a,b]\to S^N$ (per cui $G(t)\in\mathbb{R}^{N^2}$ e $G(t)^T=G(t)$ per ogni $t\in[a,b]$), indichiamo

(i) $G\geq 0 \iff G(t)\geq 0$ per q.o. $t\in[a,b]$ $\quad(\updownarrow\ G(\cdot)\in S^N_+)$
(ii) $G> 0 \iff G(t)> 0$ per q.o. $t\in[a,b]$ $\quad(\updownarrow\ G(\cdot)\in \hat{S}^N_+)$
(iii) $G\gg 0 \iff G(t)\geq \delta I_N$ per un opportuno $\delta\in(0,+\infty)$ e per q.o. $t\in[a,b]$.
(semi-def. pos., def. pos. e uniforme def. pos. rispettivamente)

I DATI ASSEGNATI: $n,k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $T\in(0,+\infty)$, $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$;
$A(\cdot)\in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n^2})$, $B(\cdot)\in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n\times k})$, $b(\cdot)\in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$;
$Q(\cdot)\in L^\infty(0,T;S^n)$, $S(\cdot)\in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{k\times n})$, $R(\cdot)\in L^\infty(0,T;S^k)$, $G\in S^n$.

IL SISTEMA DI CONTROLLO:
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t)+B(t)u(t)+b(t), & t\in[s,T], \\ x(s)=y , \end{cases}$$
(forward ODE lineare)

nelle incognite $u(\cdot):[0,T]\to\mathbb{R}^k$ (controllo) e $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot)):[0,T]\to\mathbb{R}^n$ (traiettoria) misurabili. ($\Rightarrow U=\mathbb{R}^k$, che è polacco)

IL FUNZIONALE COSTO:
$$J(s,y;u(\cdot)) := \frac{1}{2}\int_s^T\{\langle Q(t)x(t),x(t)\rangle + 2\langle S(t)x(t),u(t)\rangle + \langle R(t)u(t),u(t)\rangle\}\,dt + \frac{1}{2}\langle Gx(T),x(T)\rangle$$
(quadratico)

al variare di $u(\cdot):[0,T]\to\mathbb{R}^k$ misurabile e dove $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))$.

LE COPPIE AMMISSIBILI: le coppie $(x(\cdot),u(\cdot))$ con $u(\cdot)\in\mathcal{V}_{ad}[s,T]\triangleq L^2(s,T;\mathbb{R}^k)$ (controllo ammissibile) e con $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))\in \mathcal{Y}[s,T]\triangleq L^2(s,T;\mathbb{R}^n)$.

Problema (DLQ): minimizzare $J(s,y;\cdot)$ su $\mathcal{V}_{ad}[s,T]$.

LE COPPIE OTTIMALI: le coppie ammissibili $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ con $J(s,y;\bar{u}(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{V}_{ad}[s,T]} J(s,y;u(\cdot))$.
(controllo ottimale)

NOTA: Coerentemente con le notazioni generali, abbiamo $b(t,x,u)\equiv A(t)x+B(t)u+b(t)$, $\ell(t,x,u)\equiv \frac{1}{2}\{\langle Q(t)x;x\rangle + 2\langle S(t)x;u\rangle + \langle R(t)u;u\rangle\}$ e $h(x)\equiv\frac{1}{2}\langle Gx;x\rangle$ per ogni $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$ e $u\in\mathbb{R}^k$. ($\Rightarrow$ valgono le ipotesi per le condizioni di ottimalità di Pontryagin (D1)–(D4))

LA FUNZIONE HAMILTONIANA (DEL PROBLEMA (DLQ)): $H(t,x,u,p):[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,

$$H(t,x,u,p) \triangleq -\frac{1}{2}\langle R(t)u;u\rangle + \langle B(t)^T p - S(t)x;u\rangle + \Big\{-\frac{1}{2}\langle Q(t)x;x\rangle + \langle A(t)^T p;x\rangle + \langle p;b(t)\rangle\Big\}.$$

$(\Rightarrow -H_x(t,x,u,p) = -A(t)^T p + Q(t)x + S(t)^T u)$

LE VARIABILI AGGIUNTE E LE EQUAZIONI AGGIUNTE (DEL PROBLEMA (DLQ)): per ogni coppia ammissibile $x(\cdot),u(\cdot)$, una variabile aggiunta associata a $(x(\cdot),u(\cdot))$ è una mappa $p(\cdot)\equiv p(\cdot;(x(\cdot),u(\cdot)))\in C([s,T],\mathbb{R}^n)$ che soddisfa l'equazione aggiunta (backward ODE lineare)

$$\begin{cases} \dot p(t) = -A(t)^T p(t) + Q(t)x(t) + S^*(t)^T u(t), & t\in[s,T],\\ p(T) = -Gx(T). \end{cases}$$

LE TRIPLETTE AMMISSIBILI/OTTIMALI: le triplette $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot))$ con $(x(\cdot),u(\cdot))$ ammissibile/ottimale e con $p(\cdot)\equiv p(\cdot;(x(\cdot),u(\cdot)))$ una variabile aggiunta associata a $(x(\cdot),u(\cdot))$.

IL SISTEMA HAMILTONIANO ESTESO (DEL PROBLEMA DLQ):

$$\begin{cases} \dot x(t) = A(t)x(t)+B(t)u(t)+b(t) = H_p(t,x(t),u(t),p(t)), & t\in[s,T],\\ \dot p(t) = -A(t)^T p(t) + Q(t)x(t) + S(t)^T u(t) = -H_x(t,x(t),u(t),p(t)), & t\in[s,T],\\ x(s) = y, \quad p(T) = -Gx(T),\\ \langle B(t)^T p(t) - S(t)x(t);u(t)\rangle - \frac{1}{2}\langle R(t)u(t);u(t)\rangle = \max_{u\in\mathbb{R}^k}\Big\{\langle B(t)^T p(t)-S(t)x(t);u\rangle - \frac{1}{2}\langle R(t)u;u\rangle\Big\}, & \text{q.o. } t\in[s,T]. \end{cases}$$

(Condizione del massimo di Pontryagin)

(sistema forward-backward lineare (+ condizione del massimo))

OSSERVAZIONE. La condizione del massimo di Pontryagin equivale alle condizioni seguenti:

$$\begin{cases} R(t)u(t) - B(t)^T p(t) + S(t)x(t) = 0, & \text{q.o. } t\in[s,T],\\ R(t)\geq 0, & \text{q.o. } t\in[s,T] \quad (\text{cioè } R\geq 0) \end{cases}$$

. In particolare, sotto tale condizione, se $R\overset{\forall t}{>}0$ allora il controllo è esprimibile in forma feedback come

$$u(t) = R(t)^{-1}[B(t)^T p(t) - S(t)x(t)], \quad t\in[s,T]$$

(vincoli di disuguaglianza rognosi...)

Problema (DLQ) standard: è il Problema (DLQ) per il quale i coefficienti $(Q(\cdot), S(\cdot), R(\cdot)$ e $G)$ del funzionale costo godono delle seguenti proprietà:

$$R \gg 0, \qquad Q - S^T R^{-1} S \geq 0 \quad e \quad G \geq 0 .$$

OSSERVAZIONE. Se $\inf_{u(\cdot)\in V_{ad}[s,T]} J(s,y;u(\cdot)) > -\infty$ allora $R \geq 0$.

Principio del massimo di Pontryagin per il Problema (DLQ) ed esistenza di un unico controllo ottimale per il Problema (DLQ) standard.

I Se esiste una coppia ottimale $(\bar x(\cdot), \bar u(\cdot))$ per il Problema (DLQ), allora esiste una variabile aggiunta $p(\cdot) \equiv p(\cdot\,; (\bar x(\cdot), \bar u(\cdot)))$ associata a $(\bar x(\cdot), \bar u(\cdot))$ tale che la tripletta (ottimale) $(\bar x(\cdot), \bar u(\cdot), p(\cdot))$ sia soluzione del sistema hamiltoniano esteso del Problema (DLQ):

$$\begin{cases} \dot{\bar x}(t) = A(t)\bar x(t) + B(t)\bar u(t) + b(t), & t \in [s,T], \\ \dot p(t) = -A(t)^T p(t) + Q(t)\bar x(t) + S(t)^T \bar u(t), & t \in [s,T], \\ \bar x(s) = y, \qquad p(T) = -G\bar x(T), \\ R(t)\bar u(t) - B(t)^T p(t) + S(t)\bar x(t) = 0, & q.o.\ t \in [s,T], \\ R(t) \geq 0, \quad q.o.\ t \in [s,T] . \end{cases}$$

II Se il Problema (DLQ) è standard, allora esiste uno ed un solo controllo ottimale $\bar u(\cdot)$ per tale problema. Inoltre, se $\bar x(\cdot) \equiv x(\cdot\,; \bar u(\cdot))$, allora esiste una ed una sola variabile aggiunta $\bar p(\cdot) \equiv p(\cdot\,; (\bar x(\cdot), \bar u(\cdot)))$ associata a $(\bar x(\cdot), \bar u(\cdot))$ tale che $\bar u(\cdot)$ risulta esprimibile in forma feedback

$$\bar u(t) = R(t)^{-1}\left[B(t)^T \bar p(t) - S(t)\bar x(t) \right], \qquad t \in [s,T] .$$

LA FUNZIONE VALORE (DEL PROBLEMA (DLQ)): $V(s,y) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$$\begin{cases} V(s,y) \triangleq \inf_{u(\cdot)\in V_{ad}[s,T]} J(s,y;u(\cdot)) & \text{per ogni } (s,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ V(T,y) \triangleq \frac{1}{2}\langle Gy; y\rangle & \text{per ogni } y \in \mathbb{R}^n . \end{cases}$$

L'EQUAZIONE HJB (DEL PROBLEMA (DLQ)):

$$\begin{cases} -v_t(t,x) + \sup_{u\in U}\Big\{ -\frac{1}{2}\langle R(t)u; u\rangle - \langle B(t)^T v_x(t,x) + S(t)x; u\rangle - \Big[\frac{1}{2}\langle Q(t)x; x\rangle + \langle A(t)^T v_x(t,x); x\rangle \\ \quad + \langle v_x(t,x); b(t)\rangle\Big]\Big\} = 0, & (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ v(T,x) = \frac{1}{2}\langle Gx; x\rangle, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

nelle incognite $v(t,x) \in C^{1,1}([0,T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$

L'EQUAZIONE DI RICCATI (DEL PROBLEMA (DLQ)): nell'ipotesi che $R>0$,

(quadratica nell'incognita)

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A(t)^T P(t) + Q(t) - [B(t)^T P(t) + S(t)]^T R(t)^{-1}[B(t)^T P(t) + S(t)] = 0,$$

q.o. $t\in[0,T]$,

$$P(T) = G$$

(backward)

nelle incognite $P(\cdot)\in C([0,T];\mathbb{R}^{n^2})$. (Equivalentemente,

(Compaiono tutti i coefficienti tranne $b(\cdot)$)

OSSERVAZIONE. La locale lipschitzianità in $P(\cdot)$ implica la locale risolubilità. Grazie alla limitatezza dei coefficienti, se $R>>0$ allora sussiste l'unicità della soluzione e $P(t)\in S^n$.

$$\dot{P}(t) + P(t)[A(t) - B(t)R(t)^{-1}S(t)] + [A(t) - B(t)R(t)^{-1}S(t)]^T P(t) -$$

$$- P(t)B(t)R(t)^{-1}B(t)^T P(t) + Q(t) - S(t)^T R(t)^{-1} S(t) = 0, \quad \text{q.o. } t\in[0,T],$$

$$P(T) = G \quad .)$$

La ODE lineare associata all'equazione di Riccati (del Problema (DLQ)): nell'ipotesi che $R>>0$,

(backward ODE lineare)

$$\dot{\varphi}(t) + \{[A(t) - B(t)R(t)^{-1}S(t)]^T - P(t)B(t)R(t)^{-1}B(t)^T\}\varphi(t) + P(t)b(t) = 0, \quad \text{q.o. } t\in[0,T],$$

$$\varphi(T) = 0$$

nell'incognita $\varphi(\cdot)\equiv\varphi(\cdot;P(\cdot)) \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$.

(Compaiono tutti i coefficienti tranne $Q(\cdot)$ e G) (impliciti, in realtà, nella $P(\cdot)$)

($\varphi(\cdot)$ esiste unica dove $P(\cdot)$ esiste (unica))

Teorema (Ottimalità via l'equazione di Riccati). Sia assunta la condizione $R>>0$. Supponiamo che esista la soluzione $P(\cdot)\in C([0,T];S^n)$ (su tutto $[0,T]$) dell'equazione di Riccati del Problema (DLQ), e sia quindi $\varphi(\cdot)\equiv\varphi(\cdot;P(\cdot))\in C([0,T];\mathbb{R}^n)$ la soluzione della ODE lineare associata. Allora esiste uno ed un solo controllo ottimale $\bar{u}(\cdot)$ per il Problema (DLQ), e se $\bar{x}(\cdot)\equiv x(\cdot,\bar{u}(\cdot))$ allora esiste una ed una sola variabile aggiunta $\bar{p}(\cdot)\equiv p(\cdot;(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot)))$ associata a $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ tale che $\bar{u}(\cdot)$ risulti esprimibile in forma feedback

$$\bar{u}(t) = R(t)^{-1}[B(t)^T\bar{p}(t) - S(t)\bar{x}(t)], \quad t\in[0,T].$$

Precisamente è

$$\bar{p}(t) = -P(t)\bar{x}(t) - \varphi(t), \quad t\in[0,T], \text{ per cui}$$

$$\boxed{\bar{u}(t) = -R(t)^{-1}[(B(t)^T P(t) + S(t))\bar{x}(t) + B(t)^T\varphi(t)], \quad t\in[0,T]}.$$

(Compaiono solo i coefficienti di "$\bar{u}(\cdot)$" (esplicitamente))

Inoltre, la funzione valore del Problema (DLQ) assume la seguente forma:

$$V(s,y) = \frac{1}{2}\langle P(s)y;y\rangle + \langle \varphi(s);y\rangle + \frac{1}{2}\int_s^T \left\{ 2\langle \varphi(t);b(t)\rangle - \left|R(t)^{-\frac{1}{2}} B(t)^T \varphi(t)\right|^2 \right\} dt$$

$y \in \mathbb{R}^n$.

Corollario (Per il Problema (DLQ) standard). Se il Problema (DLQ) è standard, allora l'equazione di Riccati corrispondente ammette una (sola) soluzione $P(\cdot)$ su tutto $[0,T]$ e, se $\varphi(\cdot) \equiv \varphi(\cdot;P(\cdot))$ è la soluzione della ODE lineare associata, allora ~~...~~ il controllo ottimale $\bar{u}(\cdot)$ per il problema è

$$\bar{u}(t) = -R(t)^{-1}\left[(B(t)^T P(t) + S(t))\bar{x}(t) + B(t)^T \varphi(t)\right], \quad t \in [0,T].$$

Inoltre, è $P(t) \geq 0$ per ogni $t \in [0,T]$.

PROBLEMI STOCASTICI DI CONTROLLO OTTIMALE: FORMULAZIONE FORTE E FORMULAZIONE DEBOLE.

I DATI ASSEGNATI (PER ENTRAMBE LE FORMULAZIONI): $n, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $T \in (0,+\infty)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, (U,d) spazio metrico separabile; $b : [0,T]_t \times \mathbb{R}^n_x \times U_u \to \mathbb{R}^n$ $(b(\cdot) \equiv (b_1(\cdot),\dots,b_n(\cdot))^T)$, $\sigma : [0,T]_t \times \mathbb{R}^n_x \times U_u \to \mathbb{R}^{n\times m}$ $(\sigma(\cdot) \equiv (\sigma_{ij}(\cdot))_{i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m})$, $f : [0,T]_t \times \mathbb{R}^n_x \times U_u \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}$ mappe misurabili.

I DATI ASSEGNATI IN PIÙ PER LA FORMULAZIONE FORTE: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot))$ spazio di probabilità filtrato tale che la filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ su Ω soddisfi le usuali condizioni (di completezza e di continuità a destra) e tale che $W(\cdot) \equiv (W(t))_{0\le t\le T} \equiv$ ~~...~~ $(W_1(t),\dots,W_m(t))^T)_{0\le t\le T}$ sia un processo di Wiener rispetto a $\mathbb{F}$ m-dimensionale (il, a meno di modifiche): brevemente, tale che $W(\cdot)$ sia un m-$\mathbb{F}$-Wiener.

(ES. $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W \triangleq$ la filtrazione generata da $W(\cdot)$)

(Qui stiamo indicando $W(t) \equiv W(t,\omega)$, $(t,\omega) \in [0,T]\times\Omega$)

OSSERVAZIONE. Le mappe b,σ,f e h sono non-aleatorie!

NOTA. ~~...~~ Ogni processo che entrerà in gioco nel seguito sarà perlomeno adattato a $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$-adattato) — o meglio progressivamente misurabile rispetto a $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$-progress. mis.) — e per ciò potremo supporre $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$

IL SISTEMA DI CONTROLLO IN ~~PER LA~~ FORMULAZIONE FORTE: (ad orizzonte finito) (se $\sigma \equiv 0$, allora è tutto deterministico)

(forward SDE) (a coeff. aleatori $\mathbb{F}$-progr. mis.)

$$\begin{cases} dx(t) = b(t,x(t),u(t))\,dt + \sigma(t,x(t),u(t))\cdot dW(t), & t\in[0,T],\ P\text{-q.c.} \\ x(0) = x_0, & P\text{-q.c.}, \end{cases}$$

$x(t,\omega;u(\cdot))$

nelle incognite $u(t) \equiv u(t,\omega) : [0,T]\times\Omega \to U$ (Controllo), processo in U $\mathbb{F}$-progr. mis. e $x(t) \equiv x(t,\omega) : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ (traiettorie) processo di Itô in $\mathbb{R}^n$ rispetto a $\mathbb{F}$ e $W(\cdot)$: intendiamo precisamente che

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(s,x(s),u(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s,x(s),u(s))\cdot dW(s) \quad \text{per ogni } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}$$ 16

Notazione: per ogni $i=1,\dots,n$, denotiamo con $\sigma_{(i)}(\cdot) \triangleq (\sigma(\cdot)_{i,1}(\cdot),\dots,\sigma(\cdot)_{i,m}(\cdot))^T$ la trasposta della i-esima riga di $\sigma(\cdot)$ mentre, per ogni $j=1,\dots,m$, denotiamo con $\sigma^{(j)}(\cdot) \triangleq (\sigma(\cdot)_{1,j}(\cdot),\dots,\sigma(\cdot)_{n,j}(\cdot))^T$ la j-esima colonna di $\sigma(\cdot)$. Allora la decomposizione di Itô di $x(\cdot)$ è equivalente alla seguente:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(s,x(s),u(s))\,ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma^{(j)}(s,x(s),u(s))\,dW^j(s), \quad t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c., o cioè}$$

$$\boxed{x_i(t) = (x_0)_i + \int_0^t b_i(s,x(s),u(s))\,ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s,x(s),u(s))\,dW^j(s), \quad t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}, \ \forall i=1,\dots,n.}$$

$$. \quad dx_i(t) = b_i(t,x(t),u(t))\,dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{i,j}(t,x(t),u(t))\,dW^j(t))$$

(processo reale $\mathbb{F}$-adattato, continuo nullo in zero e (quindi $\mathbb{F}$-progr. mis.) e a variazione limitata, quindi a variazione quadratica nulla)

($\forall j=1,\dots,m$, $\mathbb{F}$-martingala locale continua nulla in zero e (quindi $\mathbb{F}$-progr. mis.), quindi ammette variazione quadratica)

(sono a loro volta processi di Itô reali rispetto a $\mathbb{F}(\cdot)$ e $W(\cdot)$)

(in particolare, $d(\int_0^t b_i(s,x(s),u(s))ds) = b_i(t,x(t),u(t))\,dt$ per ogni $i=1,\dots,n$, e $d(\int_0^t \sigma_{i,j}(s,x(s),u(s))\,dW^j(s)) = \sigma_{i,j}(t,x(t),u(t))\,dW^j(t)$ per ogni $i=1,\dots,n$ e $j=1,\dots,m$)

OSSERVAZIONE. Ricordiamo che tutte le componenti $x_i(\cdot)$ di $x(\cdot)$ ammetterebbero variazione quadratica $[x_i] \equiv ([x_i]_t)_{0\le t\le T}$ data da

$$[x_i]_t = \left[\left(\sum_{j=1}^m \int_0^\cdot \sigma_{i,j}(s,x(s),u(s))\,dW^j(s)\right)\right]_t = \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s,x(s),u(s))^2\,ds \overset{\parallel}{=} \int_0^t |\sigma_{(i)}(s,x(s),u(s))|^2 ds$$

per ogni $i=1,\dots,n$, per ogni $t\in[0,T]$ e P-q.c.)

o cioè tale che $d[x_i]_t = |\sigma_{(i)}(t,x(t),u(t))|^2\,dt$. Più in generale, la covariazione delle componenti di $x(\cdot)$ è data da

$$[x_i,x_h]_t = \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s,x(s),u(s))\,\sigma_{h,j}(s,x(s),u(s))\,ds = \int_0^t \langle \sigma_{(i)}(s,x(s),u(s)); \sigma_{(h)}(s,x(s),u(s))\rangle\,ds =$$

$$= \int_0^t \left(\sigma(s,x(s),u(s))\,\sigma(s,x(s),u(s))^T\right)_{i,h} ds \quad \text{per ogni } i,h=1,\dots,n,\ t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.},$$

o cioè tale che $d[x_i,x_h]_t = (\sigma(t,x(t),u(t))\,\sigma(t,x(t),u(t))^T)_{i,h}\,dt$. ($\overset{\text{"}}{=} dx_i(t)\,dx_h(t)$)

I due processi $u(\cdot)$ e $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,;u(\cdot))$ devono essere tali per cui $(b_i(t,x(t),u(t)))_{0\le t\le T} \in \Lambda^1_{\mathbb{F},W}(0,T)$ e $(\sigma_{i,j}(t,x(t),u(t)))_{0\le t\le T} \in \Lambda^2_{\mathbb{F},W^j}(0,T)$ per ogni $i=1,\dots,n$ e $j=1,\dots,m$, o equivalentemente

$$\int_0^T \left\{ |b(t,x(t,\omega),u(t,\omega))| + |\sigma(t,x(t,\omega),u(t,\omega))|^2 \right\} dt < +\infty \quad \text{per } P\text{-q.o. } \omega \in \Omega \,.)$$

$\boxed{\text{OSSERVAZIONE.}}$ Ricordiamo che, per un tale processo di Itô $x(\cdot)$, qualunque sia $F(t,x_1,\dots,x_m) : [0,T]_t \times \mathbb{R}^m_{(x_1,\dots,x_m)} \to \mathbb{R}$ di classe $C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^m)$, il processo reale $F(\cdot,x(\cdot)) \equiv (F(t,x_1(t),\dots,x_m(t)))_{0\le t\le T}$ risulta a sua volta un processo di Itô (reale) rispetto a $\mathbb{F}$ e $W(\cdot)$, e la sua decomposizione di Itô è data in notazione differenziale dalla formula di Itô:

$$dF(t,x(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x(t))\,dt + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial x_i}(t,x(t))\,dx_i(t) +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}(t,x(t))\,d[x_i,x_k]_t}_{\text{(la correzione di Itô)}} \quad \left(= \frac{1}{2}\,\text{Traccia}\left(D^2F(t,x(t))\cdot\sigma(t,x(t),u(t))\cdot\sigma(t,x(t),u(t))^T\right)dt\right).$$

Una elementare applicazione è la formula stocastica d'integrazione per parti: dati $x(\cdot) \equiv (x(t))_{0\le t\le T}$ e $y(\cdot) \equiv (y(t))_{0\le t\le T}$ due processi di Itô reali, anche il processo reale $x(\cdot)y(\cdot) \equiv (x(t)y(t))_{0\le t\le T}$ è un processo di Itô reale e la sua decomposizione di Itô è data da

$$d(x(t)y(t)) = y(t)\,dx(t) + x(t)\,dy(t) + d[x,y]_t \,.$$

$\left(\text{ES. } d(x(t)^2) = 2x(t)\,dx(t) + d[x]_t.\right)$

$\boxed{\text{IL FUNZIONALE COSTO (PER LA FORMULAZIONE FORTE):}}$ $\boxed{J(u(\cdot)) \doteq \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t,x(t),u(t))\,dt + h(x(T))\right]}$ $(\in \mathbb{R})$ al variare di $u(\cdot) : [0,T]\times\Omega \to U$ $\mathbb{F}$-progr. mis. e dove $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,;u(\cdot))$. (dove $\mathbb{E}(\cdot) \equiv \mathbb{E}^P(\cdot)$)

$\boxed{\text{I CONTROLLI AMMISSIBILI E LE COPPIE AMMISSIBILI IN SENSO FORTE:}}$ i controlli "ammissibili in senso forte" (o fortemente ammissibili) sono i controlli $u(\cdot) : [0,T]\times\Omega \to U$ $\mathbb{F}$-progr. mis. tali che esiste una ed una sola" soluzione $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,;u(\cdot))$ della SDE di controllo ("una sola" a meno di indistinguibilità, ossia di modifiche uniformi: se $y(\cdot) \equiv y(\cdot\,;u(\cdot))$ è un'altra soluzione della SDE di controllo, allora $P[x(t)=y(t) \text{ per ogni } t\in[0,T]] = 1$) e tali che inoltre risulti

$(f(t,x(t),u(t)))_{0\le t\le T} \in L^1_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$ e $h(x(T)) \in L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$ (nel senso che $(f(t,x(t),u(t)))_{0\le t\le T}$ risulti un processo (reale) $\mathbb{F}$-progr. mis. tale che $\mathbb{E}\left[\int_0^T |f(t,x(t),u(t))|\,dt\right] < +\infty$ mentre $h(x(T))$ risulti (una v.a.r.) $\mathcal{F}_T$-misurabile e con $\mathbb{E}[|h(x(T))|] < +\infty$).

$\boxed{\text{NOTAZIONE:}}$ denotiamo con "$\mathcal{U}^s_{ad}[0,T]$" l'insieme dei controlli ammissibili in senso forte.

$$\equiv \mathcal{U}^s_{ad}([0,T], n, m, x_0, (U,d), b, \sigma, f, h, (\Omega,\mathcal{F},P,\mathbb{F},W(\cdot)))$$

Allora le coppie "ammissibili in senso forte" sono le coppie $(x(\cdot),u(\cdot))$ con $u(\cdot)\in\mathcal{U}^s_{ad}[0,T]$ e $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))$. (14

IL PROBLEMA DI CONTROLLO OTTIMALE IN SENSO FORTE:

Problema (SS): minimizzare $J(\cdot)$ su $\mathcal{U}^s_{ad}[0,T]$. (Convenzione: $\inf\emptyset=+\infty$)

Ipotesi (H0) di finitezza (per la formulazione forte): $\inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^s_{ad}[0,T]} J(u(\cdot)) > -\infty$.

I CONTROLLI / LE COPPIE OTTIMALI IN SENSO FORTE: i controlli $\bar u(\cdot)\in\mathcal{U}^s_{ad}[0,T]$ soluzioni per il Problema (SS) del Problema (SS) nel senso che $J(\bar u(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^s_{ad}[0,T]} J(u(\cdot))$ / le coppie $(\bar x(\cdot),\bar u(\cdot))$ con $\bar u(\cdot)$ controllo ottimale in senso forte e $\bar x(\cdot)\equiv x(\cdot;\bar u(\cdot))$.

Un teorema di esistenza di un controllo ottimale in senso forte: Siano assegnati $n,k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $m=1$, $T\in(0,+\infty)$, $x_0\in\mathbb{R}^n$, $U\subseteq\mathbb{R}^k$; $A,C\in\mathbb{R}^{n^2}$, $B,D\in\mathbb{R}^{n\times k}$; $f:\mathbb{R}^n_x\times U\to\mathbb{R}$ e $h:\mathbb{R}^n_x\to\mathbb{R}$ mappe misurabili. Siano assunte dunque una delle 2 ipotesi (H1) e (H2) su U, f e h date in seguito:

(H1) Lo spazio U è convesso e chiuso in $\mathbb{R}^k$. Inoltre le mappe f e h sono convesse (su tutto il proprio dominio di definizione) ed esistono costanti $\delta, K\in(0,+\infty)$, tali che $f(x,u)\geq\delta|u|^2-K$ e $h(x)\geq -K$ per ogni $x\in\mathbb{R}^n$ e $u\in U$.

(H2) Lo spazio U è convesso e compatto in $\mathbb{R}^k$. Inoltre le mappe f e h sono convesse (su tutto il proprio dominio di definizione).

Allora il Problema (SS) corrispondente al sistema di controllo (in formulazione forte)

$$\begin{cases} dx(t) = [Ax(t)+Bu(t)]dt + [Cx(t)+Du(t)]dW(t), & t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.},\\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

e al funzionale costo (in formulazione forte)

$$J(u(\cdot)) \doteq \mathbb{E}\left[\int_0^T f(x(t),u(t))dt + h(x(T))\right],$$

per i quali sia assunta pure la corrispondente ipotesi (H0), ammette un controllo $\bar u(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;U)$ ottimale (in senso forte).

(Un Problema (SS) di questa forma è un particolare Problema lineare-convesso stocastico di controllo ottimale.)

IL PROBLEMA DI CONTROLLO OTTIMALE IN SENSO DEBOLE:

Problema (WS): è del tutto analogo al Problema (SS) ma con la differenza (essenziale) che pure lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot))$ diventa parte del controllo.

I CONTROLLI AMMISSIBILI IN SENSO DEBOLE: tutte le sestuple $\pi =$

$= (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot), u(\cdot))$, e anche $u(\cdot) \equiv (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot), u(\cdot))$, che ~~soddisfano le seguenti~~ godono delle due seguenti proprietà:

(i) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot))$ è uno spazio di probabilità filtrato tale che la filtrazione $\mathbb{F}$ su Ω $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ soddisfi le ipotesi usuali e tale che $W(\cdot)$ sia un m-$\mathbb{F}$-Wiener.

(ii) $u(t) \equiv u(t,\omega) : [0,T]\times\Omega \to U$ è un processo $\mathbb{F}$-progr. mis. tale che esista una ed una sola soluzione $x(t;u(\cdot)) \equiv x(t,\omega;u(\cdot)) \equiv x(t,\omega;\pi) :$
$: [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ della SDE su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot))$

$$\begin{cases} dx(t) = b(t,x(t),u(t))\,dt + \sigma(t,x(t),u(t))\cdot dW(t), & t\in[0,T],\ P\text{-q.c.},\\ x(0) \equiv x_0, & P\text{-q.c.},\end{cases}$$

e tale che inoltre risulti $(f(t,x(t),u(t)))_{0\le t\le T} \in L^1_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$ e

$h(x(T)) \in L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$.

NOTAZIONE: denotiamo con "$\mathcal{U}^w_{ad}[0,T]$" l'insieme dei controlli ammissibili in senso debole.
Le "coppie ammissibili in senso debole" sono le coppie $(x(\cdot),u(\cdot))$ con $u(\cdot) \equiv (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot), u(\cdot))$
$\in \mathcal{U}^w_{ad}[0,T]$ e $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,;u(\cdot))$. (ES. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot), u(\cdot))$ con $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot))$ assegnato e $u(\cdot) \in \mathcal{U}^s_{ad}[0,T]$.)

Problema (WS): minimizzare $J(\pi)$ ($J(u(\cdot))$) al variare di $\pi \in \mathcal{U}^w_{ad}[0,T]$ ($u(\cdot)$), dove

$$J(u(\cdot)) \equiv J(\pi) =' J(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot), u(\cdot)) =$$

$$= \mathbb{E}^P\left[\int_0^T f(t,x(t;u(\cdot)),u(t))\,dt + h(x(T;u(\cdot)))\right]$$ per ogni

$\pi = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{U}^w_{ad}[0,T]$.

Ipotesi (SE0) di finitezza (per la formulazione debole): $\inf_{\pi\in\mathcal{U}^w_{ad}[0,T]} J(\pi) > -\infty$.

I CONTROLLI OTTIMALI IN SENSO DEBOLE (per il Problema (WS)): i controlli $\bar u(\cdot) \equiv \bar\pi = (\bar\Omega, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{F}}, \bar P, \bar W(\cdot), \bar u(\cdot))$
$\in \mathcal{U}^w_{ad}[0,T]$ soluzioni del Problema (WS) nel senso che

$J(\bar{\pi}) = \inf_{\pi \in \mathcal{U}^w_{ad}[0,T]} J(\pi)$. Le "coppie ottimali in senso debole" sono le coppie $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ con $\bar{u}(\cdot) \equiv \bar{\pi}$ controllo ottimale (in senso debole) e $\bar{x}(\cdot) \equiv x(\cdot\,; \bar{u}(\cdot))$.

LE IPOTESI PER L'ESISTENZA DI UN CONTROLLO OTTIMALE IN SENSO DEBOLE: (oltre a (SE0))
(su U, b, σ, f, h)

SE1) Lo spazio metrico (U,d) è compatto, cioè completo e totalmente limitato. (In particolare è polacco.)

SE2) Esiste una costante $L \in (0,+\infty)$ tale che, per ciascuna $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u), \sigma(t,x,u), f(t,x,u), h(x)$, risulti

$$\begin{cases} |\varphi(t,x,u) - \varphi(t,\hat{x},u)| \le L|x-\hat{x}| & \text{per ogni } t\in[0,T],\ x,\hat{x}\in\mathbb{R}^n \text{ e } u\in U \\ |\varphi(t,0,u)| \le L & \text{per ogni } t\in[0,T] \text{ e } u \in U. \end{cases}$$

SE3) Per ogni $t\in[0,T]$ e $x\in\mathbb{R}^n$, il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+n^2+1}$

$$(b, \sigma\sigma^T, f)(t,x,U) \triangleq \left\{ \left(b_i(t,x,u), (\sigma(t,x,u)\sigma(t,x,u)^T)_{i,k}, f(t,x,u) \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,n}} \,\middle|\, u\in U \right\}$$

è ivi convesso. ("Condizioni di Roxin")

Teorema (Esistenza di un controllo ottimale in senso debole). Siano assunte le ipotesi (SE0)–(SE3). Allora il Problema (WS) ammette un controllo ottimale.

LE IPOTESI PER LE CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ ~~[illegible]~~ DI PONTRYAGIN PER IL CASO ~~[illegible]~~ STOCASTICO IN FORMULAZIONE FORTE:
(su U, b, σ, f, h e $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot))$)

S0) La filtrazione $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ su Ω coincide con quella generata da $W(\cdot)$, ossia $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W$, o $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}^W_t$ per ogni $t\in[0,T]$.

S1) Lo spazio metrico (U,d) è separabile. (⚠ Non era già supposto?!) $(\equiv(D1))$

S2) Esistono una costante $L\in(0,+\infty)$ ed un modulo di continuità $\bar{\omega}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ tale che, per ciascuna $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u), \sigma(t,x,u), f(t,x,u), h(x)$, risulti (quasi $\equiv(D2)$)

$$\begin{cases} |\varphi(t,x,u) - \varphi(t,\hat{x},\hat{u})| \le L|x-\hat{x}| + \bar{\omega}(d(u,\hat{u})) & \text{per ogni } t\in[0,T],\ x,\hat{x}\in\mathbb{R}^n \text{ e } u,\hat{u}\in U \\ |\varphi(t,0,u)| \le L & \text{per ogni } t\in[0,T] \text{ e } u\in U \end{cases}$$

S3) Le mappe $b(t,x,u), \sigma(t,x,u), f(t,x,u)$ e $h(x)$ sono tutte di classe C^2 nella variabile $x\in\mathbb{R}^n$. Inoltre esistono una costante $L\in(0,+\infty)$ ed un modulo di continuità $\bar{\omega}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ tale che, per ciascuna $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u), \sigma(t,x,u), f(t,x,u), h(x)$, ($\Rightarrow(D3)$) (a meno di σ)

risulti

$$\begin{cases} |\varphi_x(t,x,u) - \varphi_x(t,\hat{x},\hat{u})| \le L|x-\hat{x}| + \bar{\omega}(d(u,\hat{u})) \\ |\varphi_{xx}(t,x,u) - \varphi_{xx}(t,\hat{x},\hat{u})| \le \bar{\omega}(|x-\hat{x}| + d(u,\hat{u})) \end{cases}$$ per ogni $t\in[0,T]$, $x,\hat{x}\in\mathbb{R}^n$ e $u,\hat{u}\in U$.

(S4) Esiste $k\in\mathbb{N}$ tale che U sia un corpo convesso di $\mathbb{R}^k$. Inoltre, le mappe b,σ e f sono localmente lipschitziane nelle variabili $u\in U$, sono di classe C^1 nelle variabili $x\in\mathbb{R}^n$ e le mappe b_x,σ_x e f_x sono continue in $(x,u)\in\mathbb{R}^n\times U$.

OSSERVAZIONE. Sotto le ipotesi (S1) e (S2), ogni controllo è ammissibile.

LA FUNZIONE HAMILTONIANA-H, LA FUNZIONE HAMILTONIANA GENERALIZZATA E LA FUNZIONE-$\mathcal{H}$ (DEI PROBLEMI (SS) e (WS)):

(dipendono da b,σ e f)

La hamiltoniana-H: $H(t,x,u,p,q) : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times m}\to\mathbb{R}$,

$$H(t,x,u,p,q) \triangleq \langle p, b(t,x,u)\rangle + \underbrace{\mathrm{tr}[q^T\sigma(t,x,u)]}_{(\in\mathbb{R}^{m^2})} - f(t,x,u).$$

$\left(= \sum_{j=1}^m \langle q^{(j)}, \sigma^{(j)}(t,x,u)\rangle\right)$ (σ interviene al primo ordine)

(Ancora, $q=(q_{ij})$ con $q_{(i)} \triangleq (q_{i,1},\dots,q_{i,m})^T$ e $q^{(j)} \triangleq (q_{1,j},\dots,q_{n,j})^T$.)

La hamiltoniana generalizzata: $G(t,x,u,p,P) : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\times\mathbb{R}^n\times S^n\to\mathbb{R}$,

$$G(t,x,u,p,P) \triangleq \underbrace{\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\sigma(t,x,u)^T P\,\sigma(t,x,u)\right]}_{(m^2)} + \langle p, b(t,x,u)\rangle - f(t,x,u).$$

(σ interviene al secondo ordine)

$\left(\overset{(\text{ciclic.})}{=} \mathrm{tr}[P\sigma(t,x,u)\sigma(t,x,u)^T] = \sum_{i=1}^n \langle P^{(i)}; (\sigma(t,x,u)\sigma(t,x,u)^T)^{(i)}\rangle\right)$

La funzione-$\mathcal{H}$ associata ad una quintupla $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),q(\cdot),P(\cdot))$, dove $x(\cdot):[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n$, $u(\cdot):[0,T]\times\Omega\to U$, $p(\cdot):[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n$, $q(\cdot):[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^{n\times m}$ e $P(\cdot):[0,T]\times\Omega\to S^n$:

$\mathcal{H}(t,x,u) : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}$, ($\sigma$ interviene al primo e al secondo ordine)

$$\mathcal{H}(t,x,u) \triangleq H(t,x,u,p(t),q(t)) - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma(t,x(t),u(t))^T P(t)\sigma(t,x(t),u(t))] + \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\left[[\sigma(t,x,u)-\sigma(t,x(t),u(t))]^T P(t)[\sigma(t,x,u)-\sigma(t,x(t),u(t))]\right] =$$

$$= G(t,x,u,p(t),P(t)) + \mathrm{tr}\left[\sigma(t,x,u)^T\left[q(t)-P(t)\sigma(t,x(t),u(t))\right]\right].$$

(**OSSERVAZIONE.** Per ogni $(t,x,u,p,q,P)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times m}\times S^n$, è

$$\mathcal{H}(t,x,u,p,q) = \overset{\text{(Hamiltoniana)}}{H(t,x,u,p)} + \mathrm{tr}[q^T \sigma(t,x,u)]$$

$$G(t,x,u,p,P) = H(t,x,u,p) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma(t,x,u)^T P \sigma(t,x,u)]$$, per cui

$$\mathcal{H}(t,x,u) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma(t,x,u)^T P(t)\sigma(t,x,u)] + H(t,x,u,p(t)) +$$
$$+ \underbrace{\mathrm{tr}[q(t)^T\sigma(t,x,u)]}_{= \mathrm{tr}[\sigma(t,x,u)^T q(t)]} - \mathrm{tr}[\sigma(t,x,u)^T P(t)\sigma(t,x(t),u(t))]$$.)

I PROCESSI AGGIUNTI DEL PRIM'ORDINE E LE EQUAZIONI AGGIUNTE DEL PRIM'ORDINE DEL PROBLEMA (SS):

assumendo che le mappe $b(t,x,u)$, $\sigma(t,x,u)$, $f(t,x,u)$ e $h(x)$ siano tutte di classe C^1 nelle variabili $x \in \mathbb{R}^n$, per ogni coppia ammissibile $(x(\cdot),u(\cdot))$ in senso forte, un "processo aggiunto del prim'ordine" associato a $(x(\cdot),u(\cdot))$ è un processo $p(t) \equiv p(t,\omega) : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ in $\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)$ tale per cui esiste
$\equiv p(t,\omega;(x(\cdot),u(\cdot)))$

un processo $q(t) \equiv q(t,\omega) \equiv q(t,\omega; p(\cdot;(x(\cdot),u(\cdot))))$: $[0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^{n\times m}$ in $(\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^n))^m$ (nel senso che $q^{(j)}(\cdot) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)$ per ogni $j=1,\dots,m$) tale
(come se $q(\cdot) \equiv (q^{(1)}(\cdot),\dots,q^{(m)}(\cdot))$)

che la coppia $(p(\cdot),q(\cdot))$ soddisfi "l'equazione aggiunta del prim'ordine" (backward SDE)

$$\begin{cases} dp(t) = -\left[b_x(t,x(t),u(t))^T p(t) + \sum_{j=1}^{m} \sigma_x^{(j)}(t,x(t),u(t))^T q^{(j)}(t) - f_x(t,x(t),u(t))\right]dt + \\ \quad + q(t)\cdot dW(t) \qquad , \quad t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}, \\ p(T) = -h_x(x(T)) \qquad , \quad P\text{-q.c.} \quad . \quad (\Rightarrow p(\cdot) \equiv p(\cdot;q(\cdot))) \end{cases}$$

(! rimuovendo l'adattamento a $\mathbb{F}$, NON ha senso un'inversione temporale per ottenere una backward SDE come una forward SDE!)

(cauchy) (OSSERVAZIONE. Equivalentemente, $dp(t) = -\mathcal{H}_x(t,x(t),u(t),p(t),q(t))\,dt + q(t)\cdot dW(t)$)

Osservazione. È possibile dimostrare che, sotto le ipotesi (S0)–(S3), per ogni qualsiasi coppia di processi $(x(\cdot),u(\cdot))$ con $u(\cdot) : [0,T]\times\Omega\to U$ ~~...~~ $\mathbb{F}$-progr. mis. e ~~...~~ ~~...~~ $x(\cdot) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)$ esiste una ed una sola soluzione $(p(\cdot),q(\cdot)) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^n) \times (\mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^n))^m$ della backward SDE associata.

I PROCESSI AGGIUNTI DEL SECOND'ORDINE E LE EQUAZIONI AGGIUNTE DEL SECOND'ORDINE (DEL PROBLEMA (SS)):

assumendo che le mappe $b(t,x,u)$, $\sigma(t,x,u)$, $f(t,x,u)$ e $h(x)$ siano tutte di classe C^2 nelle variabili $x\in\mathbb{R}^n$, per ogni coppia ammissibile $(x(\cdot),u(\cdot))$ in senso forte che ammette un processo aggiunto del prim'ordine $p(\cdot) \equiv p(\cdot\,; (x(\cdot), u(\cdot)))$ e se $q(\cdot) \equiv q(\cdot\,; p(\cdot))$, allora "un processo aggiunto del second'ordine" associato a $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), q(\cdot))$ è un processo $P(t) \equiv P(t,\omega) \equiv P(t,\omega; (x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), q(\cdot))) : [0,T] \times \Omega \to S^n$ in $L^2_{\mathbb{F}}(0,T; S^n)$ tale per cui esiste un processo $Q(t) \equiv Q(t,\omega) \equiv Q(t,\omega; P(\cdot)) : [0,T] \times \Omega \to (S^n)^m$ in $(L^2_{\mathbb{F}}(0,T; S^n))^m$ (nel senso che $Q(\cdot) \equiv (Q^{(1)}(\cdot), \dots, Q^{(m)}(\cdot))$ con $Q^{(j)}(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T; S^n)$ per ogni $j = 1, \dots, m$) tale che la coppia $(P(\cdot), Q(\cdot))$ soddisfi "l'equazione aggiunta del second'ordine":

(backward SDE (e valore matriciale))

$$
\begin{cases}
dP(t) = -\Big\{ b_x(t, x(t), u(t))^T P(t) + P(t) b_x(t, x(t), u(t)) + \\
\quad + \sum_{j=1}^{m} \sigma_x^{(j)}(t, x(t), u(t))^T P(t) \sigma_x^{(j)}(t, x(t), u(t)) + \\
\quad + \sum_{j=1}^{m} \left[\sigma_x^{(j)}(t, x(t), u(t))^T Q^{(j)}(t) + Q^{(j)}(t) \sigma_x^{(j)}(t, x(t), u(t)) \right] + \\
\quad + H_{xx}(t, x(t), u(t), p(t), q(t)) \Big\} dt + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t) dW^j(t), \quad t \in [0,T] \text{ e } \mathbb{P}\text{-q.c.} \\
P(T) = -h_{xx}(x(T)), \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}
\end{cases}
$$

$(\Rightarrow P(\cdot) \equiv P(\cdot\,; Q(\cdot)))$

$\boxed{\text{Osservazione.}}$ È possibile dimostrare che, sotto le ipotesi (S0)–(S3), per ogni qualsiasi quadrupla di processi $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), q(\cdot))$ con $u(\cdot) : [0,T] \times \Omega \to U$ $\mathbb{F}$-progr. mis., $x(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T; \mathbb{R}^n)$, $p(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T; \mathbb{R}^n)$ e $q(\cdot) \in (L^2_{\mathbb{F}}(0,T; \mathbb{R}^n))^m$ esiste una ed una sola soluzione $(P(\cdot), Q(\cdot)) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T; S^n) \times (L^2_{\mathbb{F}}(0,T; S^n))^m$ della backward SDE soprascritta.

$\boxed{\text{LE SESTUPLE AMMISSIBILI/OTTIMALI IN SENSO FORTE:}}$ le sestuple $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot), Q(\cdot))$ con: $(x(\cdot), u(\cdot))$ coppia ammissibile/ottimale in senso forte, $(p(\cdot), q(\cdot))$ coppia tale che $p(\cdot) \equiv p(\cdot\,; (x(\cdot), u(\cdot)))$ è un processo aggiunto del prim'ordine associato a $(x(\cdot), u(\cdot))$ e $q(\cdot) \equiv q(\cdot\,; p(\cdot))$, e quindi $(P(\cdot), Q(\cdot))$ coppia tale che $P(\cdot) \equiv P(\cdot\,; (x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), q(\cdot)))$ è un processo aggiunto del secondo ordine associato a $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), q(\cdot))$ e $Q(\cdot) \equiv Q(\cdot\,; P(\cdot))$

IL SISTEMA HAMILTONIANO – H (DEL PROBLEMA (SS)) : assumendo sempre che b, σ, f e h siano C^2 nelle x, è il sistema "accoppiato" (soddisfatto dalle ~~...~~) sestuple ammissibili $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot), Q(\cdot))$:

(forward-backward)

$$dx(t) = b(t, x(t), u(t))\,dt + \sigma(t, x(t), u(t))\cdot dW(t) =$$

$$= H_p(t, x(t), u(t), p(t), q(t))\,dt + H_q(t, x(t), u(t), p(t), q(t))\cdot dW(t), \quad t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.},$$

$$dp(t) = -H_x(t, x(t), u(t), p(t), q(t))\,dt + q(t)\cdot dW(t), \quad t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.},$$

$$dP(t) = \dots$$

$$x(0) \equiv x_0, \quad p(T) = -h_x(x(T)), \quad P(T) = -h_{xx}(x(T)) \quad P\text{-q.c.}$$

Teorema (Principio del massimo di Pontryagin Stocastico) (MP). ~~(Condizioni necessarie di ottimalità stocastiche)~~ Siano assunte le ipotesi (S0) – (S3), oppure le ipotesi (S0) e (S1), più le (S2) ~~...~~ per le sole $C(t,x,u) = b(t,x,u), \sigma(t,x,u)$ e con le sole crescite lineari in x, più le (S3) ma con l'ipotesi che f e h siano di crescita polinomiale nelle x. Se esiste una coppia ottimale $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ in senso forte, allora esiste uno ed un solo processo aggiunto del prim'ordine $(p(\cdot), q(\cdot))$ associato a $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ (nel senso che esistono unici $p(\cdot) \equiv p(\cdot\,; (\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)))$ e $q(\cdot) \equiv q(\cdot\,; p(\cdot))$), ed esiste uno ed un solo processo aggiunto del second'ordine $(P(\cdot), Q(\cdot))$ associato a $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot), p(\cdot), q(\cdot))$, tali che la sestupla (ottimale) $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot), Q(\cdot))$ soddisfi la Condizione del massimo di Pontryagin stocastica: se $\mathcal{H}$ è la funzione ~~$\mathcal{H}$ associata alla quintupla $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot))$, allora~~

$$\boxed{\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \max_{u\in U} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), u)}, \quad \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.},$$

o equivalentemente la disuguaglianza variazionale stocastica

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t), q(t)) - H(t, \bar{x}(t), u, p(t), q(t)) -$$

$$- \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left[[\sigma(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - \sigma(t, \bar{x}(t), u)]^T P(t) [\sigma(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - \sigma(t, \bar{x}(t), u)] \right] \geq 0,$$

~~per~~ ogni $u \in U$, q.o. $t \in [0,T]$ e P-q.c. .

IL SISTEMA HAMILTONIANO-H ESTESO (DEL PROBLEMA (SS)): assumendo sempre che b, σ, f e h siano C^2 nella x, è il sistema hamiltoniano-H (del Problema (SS)) soggetto alla condizione del massimo di Pontryagin stocastica (o equivalentemente alla disuguaglianza variazionale stocastica): $(\ldots)$

$$
\begin{cases}
dx(t) = H_p(t, x(t), u(t), p(t), q(t))\,dt + H_q(t, x(t), u(t), p(t), q(t)) \cdot dW(t), & t \in [0,T] \text{ e } P\text{-q.c.},\\
dp(t) = -H_x(t, x(t), u(t), p(t), q(t))\,dt + q(t) \cdot dW(t), & t \in [0,T] \text{ e } P\text{-q.c.},\\
dP(t) = \ldots \\
x(0) \equiv x_0, \quad p(T) = -h_x(x(T)), \quad P(T) = -h_{xx}(x(T)) & P\text{-q.c.}\\
\mathcal{H}(t, x(t), u(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, x(t), u), & \text{q.o. } t \in [0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}
\end{cases}
$$

OSSERVAZIONE. Se la mappa $\sigma(t,x,u)$ fosse indipendente dalla variabile $u \in U$, cioè se $\sigma(t,x,u) \equiv \sigma(t,x)$ per ogni $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in U$, allora (dalla disuguaglianza variazionale stocastica) otteniamo subito che la condizione del massimo (di Pontryagin) stocastica diventerebbe

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t), q(t)) = \max_{u \in U} H(t, \bar{x}(t), u, p(t), q(t)), \quad \text{q.o. } t \in [0,T] \text{ e } P\text{-q.c.},$$

(parallelo al caso deterministico)

ed in particolare non avremmo bisogno né della coppia di processi $(P(\cdot), Q(\cdot))$ né della regolarità C^2 in x dei coefficienti b, σ, f e h.

Un altro caso nel quale non occorrono né processi né regolarità di secondo ordine è se ~~[...]~~ U fosse un convesso di $\mathbb{R}^k$ $(k \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ e le mappe b, σ, f e h fossero tutte C^1 nella u, poiché in tal situazione la condizione del massimo stocastico diventerebbe

("forma locale" del principio del massimo)

$$\langle H_u(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t), q(t)), u - \bar{u}(t) \rangle \le 0 \quad \forall u \in U, \text{ per q.o. } t \in [0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}$$

Teorema (Condizioni sufficienti di ottimalità stocastica). Siano assunte le ipotesi del precedente teorema fino all'ipotesi (S4). Supponiamo inoltre che $h(\cdot)$ sia convessa su $\mathbb{R}^n$. Sia data una sestupla ammissibile in senso forte

21

$(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot), Q(\cdot))$ tale che la mappa $H(t,\cdot,\cdot, p(t), q(t))$ risulti concava su $\mathbb{R}^n \times U$ per q.o. $t \in [0,T]$ e P-q.c., e tale che se $\mathcal{H}$ è la funzione-$\mathcal{H}$ associata alla quintupla $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot))$ allora
$\mathcal{H}(t, x(t), u(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, x(t), u)$, q.o. $t \in [0,T]$ e P-q.c.

Allora la coppia $(x(\cdot), u(\cdot))$ è ottimale in senso forte.

$\boxed{\text{Osservazione.}}$ ~~La~~ Le teoria delle condizioni di ottimalità di Pontryagin per il caso stocastico in formulazione DEBOLE è del tutto analoga, e basta di considerare ogni processo $u(\cdot) : [0,T] \times \Omega \to U$ $\mathbb{F}$-progr. mis. come quello univocamente corrispondente ad una sestupla del tipo $\pi = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}^W, P, W(\cdot), u(\cdot))$ (dunque la (SO) riguarda ogni possibile spazio di probabilità ~~variabile~~ variabile) e, quindi, è bello di sostituire "Problema (SS)" con "Problema (WS)" e "senso forte" con "senso debole".

IL FRAMEWORK E LE IPOTESI PER LA PROGRAMMAZIONE DINAMICA DI BELLMAN (DP) PER IL CASO STOCASTICO (IN FORMULAZIONE DEBOLE):

al variare di ogni assegnata coppia $(s, y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$,

$\boxed{\text{Problema } (S_{sy}):}$ $\boxed{\text{minimizzare } J(s,y;\cdot) \text{ su "} \mathcal{U}^w_{ad}(s,T) \text{"}}$, dove con "$\mathcal{U}^w_{ad}(s,T)$" denotiamo l'insieme delle quintuple $\pi \equiv \pi(s) \equiv u(\cdot) \equiv u(\cdot;s) \equiv (\Omega, \mathcal{F}, P, W(\cdot), u(\cdot)) \equiv$
$\equiv (\Omega, \mathcal{F}, P, W(\cdot;s), u(\cdot;s))$ che godono delle due seguenti proprietà:

i) $(\Omega, \mathcal{F}, P, W(\cdot))$ è uno spazio di probabilità completo tale che

$W(\cdot) \equiv (W(t))_{s \le t \le T}$ sia un m-Wiener su Ω e per il quale definiamo su Ω la filtrazione generata da $W(\cdot)$ $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W \equiv \mathbb{F}^W(s) \equiv (\mathcal{F}^W_{t(s)})_{s \le t \le T}$.

ii) la mappa $u(t) \equiv u(t;s) \equiv u(t,\omega;s) : [s,T) \times \Omega \to U$ è un processo $\mathbb{F}$-progr. mis. tale che esiste una ed una sola soluzione $x(t;u(\cdot)) \equiv x(t,\omega;u(\cdot)) \equiv x(t,\omega;\pi(s)) :$
$: [s,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ della SDE su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot))$

$$\begin{cases} dx(t) = b(t,x(t),u(t))\,dt + \sigma(t,x(t),u(t))\cdot dW(t), & t\in(s,T], \ P\text{-q.c.}, \\ x(s) \equiv y, & P\text{-q.c.}, \end{cases}$$

(forward SDE)

e tale che ~~risulti~~ risulta $(f(t,x(t),u(t)))_{s\le t\le T} \in L^1_{\mathbb{F}}(s,T;\mathbb{R})$ e $h(x(T)) \in L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$.

Quindi $$\boxed{J(s,y;\pi) \equiv J(s,y;u(\cdot)) = E^P\Big[\int_s^T f(t,\underset{(x(t;u(t)))}{\underbrace{x(t),u(t)}})\,dt + h(\underset{(x(T;u(\cdot)))}{\underbrace{x(T)}})\Big]}$$

per ogni $\pi \equiv u(\cdot) \in \mathcal{U}^w_{ad}[s,T]$.

(S1)' Lo spazio metrico (U,d) è polacco. ($\equiv$ (S1) + completezza) $(U,b,\sigma,f\ e\ h)$

(S2)' Le mappe $b(t,x,u)$, $\sigma(t,x,u)$, $f(t,x,u)$ e $h(x)$ sono tutte uniformemente continue. Inoltre esiste una costante $L\in(0,+\infty)$ tale che, per ciascuna $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u)$, $\sigma(t,x,u)$, $f(t,x,u)$, $h(x)$, risulti

$$\begin{cases} |\varphi(t,x,u) - \varphi(t,\hat{x},u)| \le L|x-\hat{x}| & \text{per ogni } t\in[0,T],\ x,\hat{x}\in\mathbb{R}^n \text{ e } u\in U \\ |\varphi(t,0,u)| \le L & \text{per ogni } t\in[0,T] \text{ e } u\in U. \end{cases}$$

(S3)' $\equiv$ (S3)

$\boxed{\text{LA FUNZIONE VALORE (DEL PROBLEMA (WS)):}}$ $V(s,y): [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$,

((S))

$$\begin{cases} V(s,y) \triangleq \inf\limits_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]} J(s,y;u(\cdot)) & \text{per ogni } (s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n \\ V(T,y) \triangleq h(y) & \text{per ogni } y\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$\boxed{\text{L'EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI-BELLMAN (HJB) (DEL PROBLEMA (WS)):}}$

((S))

$$\begin{cases} -v_t(t,x) + \sup\limits_{u\in U} G(t,x,u,-v_x(t,x),-v_{xx}(t,x)) = 0, & (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ v(T,x) = h(x), & x\in\mathbb{R}^n, \end{cases}$$

(backward PDE del second'ordine)

nelle incognite $v(t,x)\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$.

(dove G è la hamiltoniana generalizzata del problema stocastico)

Teorema (Principio di ottimalità di Bellman stocastico: caso generale e caso liscio). Siano assunte le ipotesi (S1)' e (S2)'. Allora la funzione valore $V(s,y)$ del Problema (WS) verifica la equazione della programmazione dinamica (stocastica):

$$\boxed{V(s,y) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]} \left\{ \int_s^{\hat{s}} f(t, x(t;s,y,u(\cdot)), u(t))\,dt + V(\hat{s}, x(\hat{s}; s,y,u(\cdot))) \right\}}$$

per ogni $(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ ed ogni $\hat{s}\in[s,T]$.

Se poi esiste una coppia ottimale $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ per il Problema (S_{sy}) dove $(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ e $\bar{u}(\cdot)\equiv(\bar{\Omega},\bar{\mathcal{F}},\bar{P},\bar{W}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$, allora

$$\boxed{V(t,\bar{x}(t)) = \mathbb{E}^{\bar{P}}\left[\int_t^T f(r,\bar{x}(r),\bar{u}(r))\,dr + h(\bar{x}(T)) \,\Big|\, \mathcal{F}^w_t(s)\right]} \quad \text{per ogni } t\in[s,T]$$

e $\bar{P}$-q.c.

Inoltre, se $V(s,y)\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, allora V è una soluzione pura dell'equazione HJB del Problema (WS):

$$\begin{cases} -V_t(t,x) + \sup_{u\in U} G(t,x,u,-V_x(t,x),-V_{xx}(t,x)) = 0, & (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n, \\ V(T,x) = h(x), & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Teorema (Di verifica (stocastico)). Siano assunte le ipotesi (S1)' e (S2)'. Allora ciascuna soluzione $v(t,x)\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ dell'equazione HJB del Problema (WS) soddisfa la disuguaglianza

$$v(s,y) \le J(s,y;u(\cdot)) \quad \text{per ogni } (s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n \text{ e } u(\cdot)\in\mathcal{U}^w_{ad}[s,T].$$

Inoltre, per ogni $(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ ed ogni $\bar{u}(\cdot)\in\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]$, $\bar{u}(\cdot)$ è ottimale per il Problema (S_{sy}) se, e solo se, $\bar{x}(\cdot) \equiv x(\cdot;\bar{u}(\cdot))$ e $\bar{u}(\cdot)$ sono tali che

$$\mathcal{V}_t(t,\bar{x}(t)) \equiv \max_{u\in U} G(t,\bar{x}(t),u,-\mathcal{V}_x(t,\bar{x}(t)),-\mathcal{V}_{xx}(t,\bar{x}(t))) =$$

$$= G(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),-\mathcal{V}_x(t,\bar{x}(t)),-\mathcal{V}_{xx}(t,\bar{x}(t))),$$

q.o. $t\in[s,T]$ e P-q.c.

Teorema (Una relazione fra il MP e la DP nel caso stocastico liscio).

Siano assunte le ipotesi $(S1)'$–$(S2)'$ e $(S3)$. Fissiamo $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ e supponiamo che esista una sestupla ottimale $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot),p(\cdot),q(\cdot),P(\cdot),Q(\cdot))$ per il Problema (S_{sy}). Allora valgono le due seguenti proposizioni:
(con s al posto dello 0)

(i) Se $V\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, allora

$$V_t(t,\bar{x}(t)) = G(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),-V_x(t,\bar{x}(t)),-V_{xx}(t,\bar{x}(t))) =$$

$$= \max_{u\in U} G(t,\bar{x}(t),u,-V_x(t,\bar{x}(t)),-V_{xx}(t,\bar{x}(t))),$$

q.o. $t\in[s,T]$ e P-q.c.

(ii) Se $V\in C^{1,3}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ e se pure V_{tx} esiste ed è continua, allora

$$\begin{cases} V_x(t,\bar{x}(t)) = -p(t) & \text{per ogni } t\in[s,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \\ V_{xx}(t,\bar{x}(t))\cdot\sigma(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) = -q(t) & \text{per q.o. } t\in[s,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \end{cases}$$

In particolare, se $V\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$, allora il processo reale

$$\left(V(t,\bar{x}(t)) + \int_s^t f(r,\bar{x}(r),\bar{u}(r))\,dr\right)_{s\le t\le T}\ ,$$ dove

$\bar{\pi}(\cdot) \equiv (\bar{\Omega},\bar{\mathcal{F}},\bar{P},\bar{W}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$, è una $\mathbb{F}^{\bar{W}}$-martingala.

PROBLEMI LINEARI-QUADRATICI STOCASTICI DI CONTROLLO OTTIMALE.

(in formulazione debole)

I DATI ASSEGNATI: $n,k,m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $T\in(0,+\infty)$, $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$;

$A(\cdot)\in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n^2})$, $B(\cdot)\in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n\times k})$, $b(\cdot)\in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$;

$C(\cdot)\equiv(C^{(1)}(\cdot),\dots,C^{(m)}(\cdot))\in(L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n^2}))^m$, $D(\cdot)\equiv(D^{(1)}(\cdot),\dots,D^{(m)}(\cdot))\in$

$\in(L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n\times k}))^m$, $\sigma(\cdot)\equiv(\sigma^{(1)}(\cdot),\dots,\sigma^{(m)}(\cdot))\in(L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n))^m$;

$Q(\cdot)\in L^\infty(0,T;S^n)$, $S(\cdot)\in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{k\times n})$, $R(\cdot)\in L^\infty(0,T;S^k)$, $G\in S^n$.

Problema (SLQ): minimizzare $J(s,y;\cdot)$ su $\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]$, dove con $\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]$ denotiamo l'insieme delle quintuple $\pi\equiv\pi(s)\equiv u(\cdot)\equiv u(\cdot;s)\equiv(\Omega,\mathcal{F},P,W(\cdot),u(\cdot))\equiv$

$\equiv(\Omega,\mathcal{F},P,W(\cdot;s),u(\cdot;s))$ che godono delle due seguenti proprietà.

(i) Le triplette $(\Omega,\mathcal{F},P)$ è uno spazio di probabilità completo tale che $W(\cdot)\equiv(W(t))_{s\le t\le T}$ sia un m-Wiener su Ω e per il quale fissiamo su Ω la filtrazione generata da $W(\cdot)$ $\mathbb{F}\equiv\mathbb{F}^W\equiv\mathbb{F}^W(s)\equiv(\mathcal{F}^W_t(s))_{s\le t\le T}$.

(ii) La mappa $u(t)\equiv u(t;s)\equiv u(t,\omega;s):[s,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^k$ $(U=\mathbb{R}^k)$ è un processo in $L^2_{\mathbb{F}}(s,T;\mathbb{R}^k)$ tale che esiste una ed una sola soluzione $x(t;u(\cdot))\equiv x(t,\omega;u(\cdot))\equiv$

$\equiv x(t,\omega;\pi(s)):[s,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n$ in $L^2_{\mathbb{F}}(s,T;\mathbb{R}^n)$ della SDE lineare su $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},P,W(\cdot))$

$$\begin{cases} dx(t) = [A(t)x(t)+B(t)u(t)+b(t)]dt\ + \\ \qquad + \sum_{j=1}^m [C^{(j)}(t)x(t)+D^{(j)}(t)u(t)+\sigma^{(j)}(t)]dW^{(j)}(t), & t\in[s,T],\ P\text{-q.c.}, \\ x(s)\equiv y, & P\text{-q.c.}. \end{cases}$$

~~[illegible]~~ Quindi (quadratico)

$$J(s,y;\pi) \equiv J(s,y;u(\cdot)) = \mathbb{E}^P\Big[\frac{1}{2}\int_s^T\big\{\langle Q(t)x(t),x(t)\rangle + 2\langle S(t)x(t),u(t)\rangle +$$

$$+ \langle R(t)u(t),u(t)\rangle\big\}dt + \frac{1}{2}\langle Gx(T),x(T)\rangle\Big]$$ per ogni $\pi \equiv u(\cdot) \in \mathcal{U}^w_{ad}[s,T]$.

$\boxed{\text{NOTA:}}$ Coerentemente con le notazioni generali, abbiamo $b(t,x,u) \equiv A(t)x + B(t)u + b(t)$,

$\sigma^{(j)}(t,x,u) \equiv C^{(j)}(t)x + D^{(j)}(t)u + \sigma^{(j)}(t)$,

$f(t,x,u) \equiv \frac{1}{2}\{\langle Q(t)x,x\rangle + 2\langle S(t)x;u\rangle + \langle R(t)u,u\rangle\}$ e $h(x) = \frac{1}{2}\langle Gx,x\rangle$

per ogni $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^k$ e $j=1,\dots,m$. ($\Rightarrow$ valgono le ipotesi per Pontryagin)

$\boxed{\text{Problema (SLQ) standard:}}$ è il Problema (SLQ) per il quale i coefficienti $Q(\cdot)$, $S(\cdot)$, $R(\cdot)$ e G di $J(s,y;\cdot)$ godono delle seguenti proprietà:

$$R \gg 0, \quad Q - S^TR^{-1}S \geq 0 \quad e \quad G \geq 0.$$

($\boxed{\text{OSSERVAZIONE.}}$ Anche se $\inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]} J(s,y;u(\cdot)) > -\infty$, non è necessario che $R \geq 0$.)

$\boxed{\text{LA FUNZIONE HAMILTONIANA:}}$ $H(t,x,u,p) : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$H(t,x,u,p) \triangleq -\frac{1}{2}\langle R(t)u,u\rangle + \langle B(t)^Tp - S(t)x, u\rangle +$$

$$+ \Big\{-\frac{1}{2}\langle Q(t)x,x\rangle + \langle A(t)^Tp,x\rangle + \langle p,b(t)\rangle\Big\}.$$

$\boxed{\text{Ipotesi per semplicità:}}$ $m = 1$.

$\boxed{\text{LA HAMILTONIANA}-H:}$ $H(t,x,u,p,q) : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$H(t,x,u,p,q) \triangleq H(t,x,u,p) + \langle q, C(t)x + D(t)u + \sigma(t)\rangle.$$

$\boxed{\text{LA HAMILTONIANA GENERALIZZATA:}}$ $\mathcal{G}(t,x,u,p,P) : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n\times S^n \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{G}(t,x,u,p,P) \triangleq H(t,x,u,p) + \frac{1}{2}[C(t)x + D(t)u + \sigma(t)]^T P [C(t)x + D(t)u + \sigma(t)]$$

$\boxed{\text{LA FUNZIONE} - \mathcal{H}:}$ (associata ad una quintupla $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),q(\cdot),P(\cdot))$, dove $x(\cdot):[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n$, $u(\cdot):[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^k$, $p(\cdot):[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n$, $q(\cdot):[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n$, $P(\cdot):[0,T]\times\Omega \to S^n$):

$$\mathcal{H}(t,x,u) : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k \to \mathbb{R},$$

$$\mathcal{H}(t,x,u) \triangleq H(t,x,u,p(t),P(t)) + [C(t)x+D(t)u+\sigma(t)]^T\{q(t)-P(t)[C(t)x(t)+D(t)u(t)+\sigma(t)]\}$$

$$\left(H(t,x,u,p(t),q(t)) - \frac{1}{2}[C(t)x(t)+D(t)u(t)+\sigma(t)]^T P(t)[C(t)x(t)+D(t)u(t)+\sigma(t)] + \frac{1}{2}[C(t)(x-x(t))+D(t)(u-u(t))]^T P(t)[C(t)(x-x(t))+D(t)(u-u(t))] \right)$$

I PROCESSI AGGIUNTI DEL PRIM'ORDINE E LE EQUAZIONI AGGIUNTE DEL PRIM'ORDINE:

per ogni coppia ammissibile $(x(\cdot),u(\cdot))$ in senso debole, un processo aggiunto del prim'ordine associato a $(x(\cdot),u(\cdot))$ è una coppia di processi $(p(\cdot),q(\cdot)) \in (L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n))^2$ che soddisfano l'equazione aggiunta del prim'ordine (backward SDE lineare)

$$\begin{cases} dp(t) = -[A(t)^T p(t) + C(t)^T q(t) - Q(t)x(t) - S(t)^T u(t)]\,dt + \\ \qquad + q(t)\,dW(t), \quad t\in[0,T],\ P\text{-q.c.} \\ p(T) = -G\,x(T), \quad P\text{-q.c.} \end{cases}$$

I PROCESSI AGGIUNTI DEL SECOND'ORDINE E LE EQUAZIONI AGGIUNTE DEL SECOND'ORDINE:

per ogni coppia ammissibile $(x(\cdot),u(\cdot))$ in senso debole che ammette un processo aggiunto del prim'ordine $(p(\cdot),q(\cdot))$, un processo aggiunto del second'ordine associato a $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),q(\cdot))$ è una coppia di processi $(P(\cdot),\Lambda(\cdot)) \in (L^2_{\mathcal{F}}(0,T;S^n))^2$ che soddisfano l'equazione aggiunta del second'ordine (backward SDE lineare (e solo matriciale))

$$\begin{cases} dP(t) = -[A(t)^T P(t) + P(t)A(t) + C(t)^T P(t) C(t) + \\ \qquad + C(t)^T\Lambda(t) + \Lambda(t)C(t) - Q(t)]\,dt + \Lambda(t)\,dW(t), \quad t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}, \\ P(T) \equiv -G, \quad P\text{-q.c.} \end{cases}$$

(NON dipende da $x(\cdot)$ e $u(\cdot)$, il quale dipende solo dai coeff. di $x(\cdot)$: $A(\cdot), C(\cdot), Q(\cdot)$ e G)

LA CONDIZIONE DEL MASSIMO DI PONTRYAGIN (STOCASTICA):

$$\begin{cases} R(t)u(t) - B(t)^T p(t) + S(t)x(t) - D(t)^T q(t) = 0, \quad \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}, \\ R(t) - D(t)^T P(t) D(t) \geq 0, \quad \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \end{cases}$$

($D(\cdot)$ e $R(\cdot)$ (e $P(\cdot)$))

$\Rightarrow$ se $\det R(\cdot) \neq 0$, allora $u(t) = R(t)^{-1}[B(t)^T p(t) - S(t)x(t) + D(t)^T q(t)]$, q.o. $t\in[0,T]$ e P-q.c.)

Principio del massimo di Pontryagin per il Problema (SLQ) ed esistenza di un "unico" controllo ottimale per il Problema (SLQ) standard.

I **a** Se esiste una coppia ottimale $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ in senso debole per il Problema (SLQ), allora esiste un processo aggiunto del primo ordine $(p(\cdot),q(\cdot))$ associato a $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ ed esiste un processo aggiunto del second'ordine $(P(\cdot),\Lambda(\cdot))$ associato a $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot),p(\cdot))$ che soddisfano il sistema hamiltoniano esteso del Problema (SLQ):

$$\begin{cases} d\bar{x}(t) = [A(t)\bar{x}(t)+B(t)\bar{u}(t)+b(t)]dt + (C(t)\bar{x}(t)+D(t)\bar{u}(t)+\sigma(t))dW(t), & t\in[s,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \\ dp(t) = -[A(t)^T p(t) + C(t)^T q(t) - Q(t)\bar{x}(t) - S(t)^T\bar{u}(t)]dt + q(t)dW(t), & t\in[s,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \\ dP(t) = -[A(t)^T P(t) + P(t)A(t) + C(t)^T P(t)C(t) + C(t)^T\Lambda(t) + \Lambda(t)C(t) - \\ \qquad - Q(t)]dt + \Lambda(t)dW(t), & t\in[s,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \\ \bar{x}(s) = y, \quad p(T) = -G\bar{x}(T), \quad P(T) = -G, & P\text{-q.c.} \\ R(t)\bar{u}(t) - B(t)^T p(t) - D(t)^T q(t) + S(t)\bar{x}(t) = 0, & \text{q.o. } t\in[s,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \\ R(t) - D(t)^T P(t) D(t) \geq 0, & \text{q.o. } t\in[s,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \quad (\Rightarrow \text{può essere } R\ngeq 0) \end{cases}$$

(sistema stocastico forward-backward lineare, + condizione del MAX)

b Sia assunto che $\inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]} J(s,y;u(\cdot)) > -\infty$. Se T è un "punto di Lebesgue" delle mappe $R(\cdot)$ e $D(\cdot)$, allora vale $R(T)+D(T)^T G D(T) \geq 0$.

(Qualsiasi sia $F\in L^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M)$, quasi ogni $x\in\mathbb{R}^N$ è un punto di Lebesgue per F:
$$\lim_{r\downarrow 0}\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)}|f(y)-f(x)|\,dy = 0.)$$

II Se il Problema (SLQ) è standard, con $\det R(t)\neq 0$ per q.o. $t\in[s,T]$ e con $R(\cdot)^{-1}\in L^\infty(s,T;S^k)$, allora esiste uno ed "un solo" controllo ottimale $\bar{u}(\cdot)$ in senso debole per tale problema. (Questo significa che esiste $\bar{u}(\cdot)\equiv(\bar{\Omega},\bar{\mathcal{F}},\bar{P},\bar{W}(\cdot),\bar{u}(\cdot))\in\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]$ minimizzante per $J(s,y;\cdot)$ su $\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]$ e tale che, se anche $(\bar{\Omega},\bar{\mathcal{F}},\bar{P},\bar{W}(\cdot),\tilde{u}(\cdot))\in\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]$ è minimizzante, allora $\bar{P}[\bar{u}(t)=\tilde{u}(t) \text{ per q.o. } t\in[s,T]] = 1$.) Inoltre, se $\bar{x}(\cdot)\equiv x(\cdot;\bar{u}(\cdot))$, allora esiste uno ed un solo processo aggiunto del primo ordine $(\bar{p}(\cdot),\bar{q}(\cdot))$ associato a $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ tale che $\bar{u}(\cdot)$ risulti esprimibile in forma feedback

$$\bar{u}(t) = R(t)^{-1}\left[B(t)^T\bar{p}(t) - S(t)\bar{x}(t) + D(t)^T\bar{q}(t)\right], \quad \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}.$$

OSSERVAZIONE. È possibile dimostrare la seguente proposizione (di equivalenza): Il Problema (SLQ) ammette una (ed una sola) coppia ottimale $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot))$ in senso debole se, e solo se, (i) esiste una (ed una sola) soluzione $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot),\bar{p}(\cdot),\bar{q}(\cdot))$ del sistema

$$\begin{cases} d\bar{x}(t) = [A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t) + b(t)]dt + [C(t)\bar{x}(t) + D(t)\bar{u}(t) + \sigma(t)]dW(t), & t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \\ d\bar{p}(t) = -[A(t)^T\bar{p}(t) + C(t)^T\bar{q}(t) - Q(t)\bar{x}(t) - S(t)^T\bar{u}(t)]dt + \bar{q}(t)dW(t), & t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \\ \bar{x}(0) = y, \quad \bar{p}(T) = -G\bar{x}(T), & P\text{-q.c.}, \\ R(t)\bar{u}(t) + S(t)\bar{x}(t) - B(t)^T\bar{p}(t) - D(t)^T\bar{q}(t) = 0, & \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \end{cases}$$

e contemporaneamente, (ii) per ogni $u(\cdot) \in \mathcal{U}^w_{ad}[0,T]$, la soluzione $(x_0(\cdot),p_0(\cdot),q_0(\cdot))$ di
$(\Omega,\mathcal{F},P,W(\cdot),u(\cdot))$

$$\begin{cases} dx(t) = [A(t)x(t) + B(t)u(t)]dt + [C(t)x(t) + D(t)u(t)]dW(t), & t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}, \\ dp(t) = -[A(t)^T p(t) + C(t)^T q(t) - Q(t)x(t) - S(t)^T u(t)]dt + \\ \qquad + q(t)dW(t), & t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}, \\ x(0) = 0, \quad p(T) = -Gx(T), & P\text{-q.c.}, \end{cases}$$

(come se $b(\cdot)\equiv\sigma(\cdot)\equiv 0$ e $y=0$)

soddisfa

$$E^P\left[\int_0^T \langle R(t)u(t) + S(t)x_0(t) - B(t)^T p_0(t) - D(t)^T q_0(t)\,;\, u(t)\rangle dt\right] \geq 0$$

("strutturale")

LA FUNZIONE VALORE (DEL PROBLEMA (SLQ)): $V(s,y) : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$,

$$\begin{cases} V(s,y) \triangleq \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^w_{ad}[s,T]} J(s,y;u(\cdot)) & \text{per ogni } (s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n \\ V(T,y) \triangleq \frac{1}{2}\langle Gy,y\rangle & \text{per ogni } y\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

EQUAZIONE HJB (DEL PROBLEMA (SLQ)):

$$-v_t(t,x) + \sup_{u\in U}\left\{H(t,x,u,-v_x(t,x)) - \frac{1}{2}[C(t)x + D(t)u + \sigma(t)]^T \cdot v_{xx}(t,x)\cdot(C(t)x + D(t)u + \sigma(t))\right\} = 0, \quad (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n,$$

$v(T,x) = \frac{1}{2}\langle Gx;x\rangle, \quad x\in\mathbb{R}^n,$

nella incognita $v(t,x) \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

L'EQUAZIONE DI RICCATI "STOCASTICA" (DEL PROBLEMA SLQ):

(è deterministica)

$$\begin{cases} \dot P(t) + P(t)A(t) + A(t)^T P(t) + Q(t) + C(t)^T P(t) C(t) - \\ - \left[B(t)^T P(t) + S(t) + D(t)^T P(t) C(t)\right]^T \left(R(t) + D(t)^T P(t) D(t)\right)^{-1} \left[B(t)^T P(t) + S(t) + \right. \\ \left. + D(t)^T P(t) C(t)\right] = 0, \qquad \text{q.o. } t \in [0,T], \\ P(T) = G \qquad \text{(backward)} \\ R + D^T P D > 0 \end{cases}$$

(b(·) e σ(·) NON compaiono)

nelle incognite $P(\cdot) \in C([0,T]; \mathbb{R}^{n^2})$.

OSSERVAZIONE. Se T è un punto di Lebesgue per $R(\cdot)$ e per $D(\cdot)$, e se vale la condizione $R(T) + D(T)^T G D(T) > 0$, allora l'equazione di Riccati stocastica è localmente risolubile (vicino a T).

Le ODE lineari associate all'equazione di Riccati stocastica:

assegnata una soluzione $P(\cdot)$ dell'equazione di Riccati stocastica,

$$\begin{cases} \dot\varphi(t) + \left\{A(t) - B(t)\left[R(t) + D(t)^T P(t) D(t)\right]^{-1} \left(B(t)^T P(t) + S(t) + D(t)^T P(t) C(t)\right)\right\}^T \varphi(t) + \\ + \left\{C(t) - D(t)\left[R(t) + D(t)^T P(t) D(t)\right]^{-1} \left(B(t)^T P(t) + S(t) + D(t)^T P(t) C(t)\right)\right\}^T P(t)\sigma(t) + \\ + P(t) b(t) = 0, \qquad \text{q.o. } t \in [0,T], \\ \varphi(T) = 0 \qquad \text{(backward)} \end{cases}$$

← nelle incognite $\varphi(\cdot) \equiv \varphi(\cdot; P(\cdot)) \in C([0,T]; \mathbb{R}^n)$.

OSSERVAZIONE. È possibile dimostrare la seguente proposizione (di unicità): Sia assunto che $D(\cdot) \in C([0,T]; \mathbb{R}^{n\times k})$ e $R(\cdot) \in C([0,T]; S^k)$. Supponiamo che esista in tutto $[0,T]$ una soluzione $P(\cdot) \in C([0,T]; \mathbb{R}^{n^2})$ dell'equazione di Riccati stocastica. Allora $P(\cdot)$ è l'unica soluzione di tale equazione, per cui in particolare $P(\cdot) \in S^n$. Inoltre, in questo caso, anche le ODE lineari associate a tale equazione ammette (una ed) una sola soluzione $\varphi(\cdot) \in C([0,T]; \mathbb{R}^n)$.

OSSERVAZIONE. È possibile dimostrare la seguente proposizione (di esistenza e unicità) per il Problema (SLQ) stocastico: Sia assunto che $D(\cdot) \in \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^{n\times k})$ e $R(\cdot) \in \mathcal{C}([0,T];\mathcal{S}^k)$. Allora esiste su tutto $[0,T]$ (ed una sola) soluzione $P(\cdot) \in \mathcal{C}([0,T];\mathcal{S}^n)$ dell'equazione di Riccati stocastica
Se il Problema (SLQ) è stocastico,
ed esiste una ed una sola soluzione $\varphi(\cdot) \in \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^n)$ della ODE lineare associata a tale equazione.

OSSERVAZIONE. Nel caso $n=k=1$ e con tutti i coefficienti A,B,C,D,Q,S,R invarianti nel tempo (cioè numeri costanti), è ben nota la completa classificazione dei possibili intervalli massimali di definizione (in $[0,+\infty)$) della soluzione $P(\cdot)$ dell'equazione di Riccati stocastica (in base a certe relazioni tra i coefficienti A,B,C,D,Q,S,R stessi). (D può essere supposto $=1$ $(\neq 0)$)

Teorema (Ottimalità via l'equazione di Riccati stocastica). Supponiamo che esista su tutto $[0,T]$ una ed una sola soluzione $P(\cdot) \in \mathcal{C}([0,T];\mathcal{S}^n)$ dell'equazione di Riccati stocastica del Problema (SLQ) tale che, se $\varphi(\cdot) \equiv \varphi(\cdot\,;P(\cdot)) \in \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^n)$ è la soluzione della ODE lineare associata a tale equazione, e se poniamo

- $\Psi(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^{k\times n}$, $\Psi \stackrel{\Delta}{=} (R+D^TPD)^{-1}(B^TP+S+D^TPC)$ $\qquad (\equiv \Psi(\cdot\,;P(\cdot)))$
- $\psi(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^{k}$, $\psi \stackrel{\Delta}{=} (R+D^TPD)^{-1}(B^T\varphi + D^TP\sigma)$ $\qquad (\equiv \psi(\cdot\,;\varphi(\cdot)))$

allora $B\Psi, D\Psi \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n^2})$ e $B\psi, D\psi \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$.

Allora esiste uno ed un solo controllo ottimale $\bar{u}(\cdot)$ in senso debole per il Problema (SLQ) $((\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\{\mathcal{F}_t\},W(\cdot)))$ e precisamente è esprimibile in forma feedback

$$\boxed{\bar{u}(t) = -\Psi(t)x(t) - \psi(t), \quad t\in[0,T] \text{ e } \mathbb{P}\text{-q.c.}}$$

Inoltre, la funzione valore del Problema (SLQ) assume la seguente forma:

$$V(0,y) = \frac{1}{2}\langle P(0)y, y\rangle + \langle \varphi(0), y\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2}\mathbb{E}^{\bar P}\left[\int_0^T \left\{ 2\langle \varphi(t), b(t)\rangle + \langle P(t)\sigma(t), \sigma(t)\rangle - \left| \left[R(t) + D(t)^T P(t) D(t)\right]^{1/2} f(t)\right|^2 \right\} dt\right],$$

$y \in \mathbb{R}^n$.

Caso $m \geq 1$: L'EQUAZIONE DI RICCATI STOCASTICA e le ODE lineare associate e il teorema di ottimalità via l'equazione di Riccati stocastica.

$$\begin{cases} \dot P + PA + A^T P + \sum_{j=1}^{m} C^{(j)T} P C^{(j)} + Q - \\ - \left[B^T P + S + \sum_{j=1}^{m} D^{(j)T} P C^{(j)}\right]^T \left[R + \sum_{j=1}^{m} D^{(j)T} P D^{(j)}\right]^{-1} \left[B^T P + S + \sum_{j=1}^{m} D^{(j)T} P C^{(j)}\right] = 0, \\ \text{q.o. } t \in (0,T), \\ P(T) = G \\ R + \sum_{j=1}^{m} D^{(j)T} P D^{(j)} > 0 . \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot\varphi + \left[A - B\left(R + \sum_j D^{(j)T} P D^{(j)}\right)^{-1}\left(B^T P + S + \sum_j D^{(j)T} P C^{(j)}\right)\right]^T \varphi + \\ + \sum_j \left[C^{(j)} - D^{(j)}\left(R + \sum_i D^{(i)T} P D^{(i)}\right)^{-1}\left(B^T P + S + \sum_i D^{(i)T}_i P D^{(i)}\right)\right]^T P \sigma^{(j)} + \\ + P b = 0, \quad \text{q.o. } t \in (0,T), \\ \varphi(T) = 0 . \end{cases}$$

Poniamo anche

$$\Psi \triangleq \left(R + \sum_j D^{(j)T} P D^{(j)}\right)^{-1} \left[B^T P + S + \sum_j D^{(j)T} P C^{(j)}\right] \quad \text{e}$$

$$f \triangleq \left(R + \sum_j D^{(j)T} P D^{(j)}\right)^{-1} \left[B^T \varphi + \sum_j D^{(j)T} P \sigma^{(j)}\right]. \quad (\ldots \text{analogo} \ldots)$$

Supponiamo che $\exists !\ P(\cdot) \in C([0,T], S^n)$ e $\varphi(\cdot) \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$ tale che $B\Psi, D\Psi \in L^\infty$ e $Bf, Df \in L^2$. Allora $\exists !\ \bar u(\cdot)$ ottimale per il Problema (LQ) ed è

$$\bar u(t) = -\Psi(t)\bar x(t) - f(t), \quad t \in [0,T]. \quad \text{Inoltre}$$

$$V(0,y) = \frac{1}{2}\langle P(0)y, y\rangle + \langle \varphi(0), y\rangle + \frac{1}{2}\mathbb{E}^{\bar P}\left[\int_0^T \left\{ 2\langle \varphi(t), b(t)\rangle + \sum_j \langle P(t)\sigma^{(j)}(t), \sigma^{(j)}(t)\rangle - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left| \left[R(t) + \sum_j D^{(j)T}(t) P(t) D^{(j)}(t)\right]^{1/2} f(t)\right|^2 \right\} dt\right], \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

UN ESEMPIO notevole di Problema (SLQ): ottimizzazione media-varianza di portafoglio. (MVO)

(con $m=1$ e $K = m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$) (e $\Delta = 0$)

(**Notazione:** $\mathbb{R}_+ \triangleq [0,+\infty)$, $\widehat{\mathbb{R}}_+ \triangleq \mathbb{R}_+\setminus\{0\} = (0,+\infty)$.)

I dati assegnati: (i) $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $T \in \widehat{\mathbb{R}}_+$, $(p_0, p_1, \dots, p_m) \in \widehat{\mathbb{R}}_+^{m+1}$; $r(\cdot) \in L^\infty(0,T;\widehat{\mathbb{R}}_+)$,

$b(\cdot) \equiv (b_1(\cdot),\dots,b_m(\cdot))^T \in L^\infty(0,T;\widehat{\mathbb{R}}^m_+)$, $\sigma(\cdot) \equiv (\sigma_{i,j}(\cdot))_{i,j=1,\dots,m} \equiv (\sigma^{(1)}(\cdot),\dots,\sigma^{(m)}(\cdot)) \in (L^\infty(0,T;\mathbb{R}))^m$;

$N_0(0), N_1(0), \dots, N_m(0))^T \in \mathbb{R}_+^{m+1}\setminus\{0\}$; $(\Omega, \mathcal{F}, P, W(\cdot))$ uno spazio di probabilità completo, dove $W(\cdot) \equiv (W(t))_{0\le t\le T} \equiv ((W^1_1(t),\dots,W^m_m(t))^T)_{0\le t\le T}$ è un m-Wiener su Ω, nel quale consideriamo la filtrazione generata da $W(\cdot)$: $\mathbb{F} \equiv \mathbb{F}^W \equiv (\mathcal{F}^W_t)_{0\le t\le T}$.

Ipotesi basilari (su $r(\cdot)$, $b(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$): (i) $b_i(t) > r(t)\ (>0)$ per ogni $i=1,\dots,m$ e (per q.o.) $t\in[0,T]$,

(ii) $\sigma\sigma^T \gg 0$, nel senso che $\sigma(t)\sigma(t)^T \geq \delta I_m$ per q.o. $t\in[0,T]$ (e per un'opportuna costante $\delta \in (0,+\infty)$). ("non-degenerazione")

(1 solo bond) (titolo privo di rischio)

La ODE del prezzo $P_0(\cdot)$ del bond: (processo reale deterministico)

$$\begin{cases} dP_0(t) = r(t)\,P_0(t)\,dt, & t\in[0,T], \\ P_0(0) = p_0 & \text{(← prezzo iniziale del bond)} \end{cases}$$

(← il tasso d'interesse concreto relativo al bond) (T data di maturazione, o di scadenza)

$$\forall t \quad P_0(t) = p_0 \exp\Big(\int_0^t r(s)\,ds\Big)$$

(processi reali stocastici) (di Itô)

Le SDE dei prezzi $P_1(\cdot),\dots,P_m(\cdot)$ degli m stocks: per ogni $i = 1,\dots,m$, (m stocks) (titoli con rischio)

((i) OK) ← (i tassi di apprezzamento dello stock i-esimo)

$$\begin{cases} dP_i(t) = P_i(t)\Big\{b_i(t)\,dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{i,j}(t)\,dW^j_j(t)\Big\}, & t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}, \\ P_i(0) = p_i, & P\text{-q.c.} \end{cases}$$

(← le volatilità dello stock j-esimo) (← prezzo iniziale dello stock i-esimo)

per ogni $i=1,\dots,m$, $\forall t \quad P_i(t) \underset{P\text{-q.c.}}{=} p_i \exp\Big(\int_0^t \Big(b_i(s) - \sum_{j=1}^m \frac{\sigma_{i,j}(s)^2}{2}\Big)ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s)\,dW^j_j(s)\Big)$

($N_0(0), N_1(0), \dots, N_m(0)$ sono NOTI)

La strategia di portafoglio dell'investitore: per ogni $i=0,1,\dots,m$, e per (q.o.) $t\in[0,T]$, investire in $N_i(t)\,(\geq 0)$ azioni del titolo i-esimo in modo che restino così definite $m+1$ mappe $N_0(\cdot), N_1(\cdot), \dots, N_m(\cdot): [0,T]\to\mathbb{R}_+$ misurabili (non tutti $\equiv 0$). (processi reali deterministici MA INCOGNITI: dipendono dall'andamento del mercato!)

Ipotesi di semplicità: le negoziazioni delle azioni avvengono in modo continuo nel tempo ed i relativi costi di transizione e di consumo risultano trascurabili. ($dN_i(t) \simeq 0$)

Il valore di mercato della ricchezza dell'investitore ~~[illegible]~~ su ciascun titolo:

per ogni $i=0,1,\dots,m$ e per q.o. $t\in[0,T]$ e P-q.c., $\boxed{u_i(t) \triangleq N_i(t)\,P_i(t)}$. (processo reale stocastico INCOGNITO $\mathbb{F}$-progr. mis.)

La ricchezza totale dell'investitore: per q.o. $t\in[0,T]$ e P-q.c., ($\Rightarrow u_i(0) \equiv N_i(0)\,p_i$ P-q.c.)

(TRAIETTORIA)

$$\boxed{x(t) \triangleq \sum_{i=0}^m u_i(t) = \sum_{i=0}^m N_i(t)\,P_i(t)}.$$ (processo reale stocastico INCOGNITO)

▹ Il portafoglio dell'investitore: (CONTROLLO) per q.o. $t \in [0,T]$ (P-q.c.), $\boxed{u(t) \triangleq (u_1(t), \dots, u_m(t))^T}$ $(\Rightarrow x(\cdot) \equiv x(\cdot\,; u(\cdot)))$

(processo stocastico in $\mathbb{R}^m$ INCOGNITO) (sono F-progr. mis.) (sono consentite le posizioni allo scoperto (SHORT SELLING))

(osservato che (istante per istante) $u_0(t)$ è univocamente determinato da $u_1(t), \dots, u_m(t)$, noto $x(t)$)

▹ **Il problema di ottimizzazione media-varianza di portafoglio:**

determinare una strategia di portafoglio $(\bar N_0(\cdot), \bar N_1(\cdot), \dots, \bar N_m(\cdot))^T$, o equivalentemente un portafoglio $\bar u(\cdot)$, tali per cui $\bar u(\cdot) \in L^2_F(0,T;\mathbb{R}^m)$ sia tale che, se $\bar x(\cdot) \equiv x(\cdot\,;\bar u(\cdot))$ $(\in L^2_F(0,T;\mathbb{R}))$, allora

$$\begin{cases} \mathbb{E}^P[\bar x(T)] = \max\limits_{u(\cdot) \in L^2_F(0,T;\mathbb{R}^m)} \mathbb{E}^P[x(T;u(\cdot))] \\[2ex] \mathrm{Var}^P[\bar x(T)] = \min\limits_{u(\cdot) \in L^2_F(0,T;\mathbb{R}^m)} \mathrm{Var}^P[x(T;u(\cdot))] \end{cases}$$

(massimizzare il rendimento finale atteso)

(minimizzare il rischio associato a tale stima di rendimento finale atteso)

: (▹ Il problema è non-banale: il conflitto tra il max e il min nasce dal fatto che

$$\mathrm{Var}^P[x(T)] \triangleq \mathbb{E}^P[\{x(T) - \mathbb{E}^P[x(T)]\}^2] = \mathbb{E}^P[x(T)^2] - \mathbb{E}^P[x(T)]^2 .)$$

(NON è quadratico nel senso della teoria sviluppata finora!)

tale che cioè

$$\boxed{(-\mathbb{E}[\bar x(T)], \mathrm{Var}[\bar x(T)]) = \min_{u(\cdot) \in L^2_F(0,T;\mathbb{R}^m)} (-\mathbb{E}[x(T;u(\cdot))], \mathrm{Var}[x(T;u(\cdot))])}$$

$(\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$

Portafogli ammissibili e portafoglio efficiente (o strategie di portafoglio) (o strategia di portafoglio) **:** le strategie di portafoglio / i portafogli $u(\cdot)$ sono "ammissibili" se $u(\cdot) \in L^2_F(0,T;\mathbb{R}^m)$. Le strategie di portafoglio / i portafogli $\bar u(\cdot)$ sono "efficienti" (ottimali) se sono ammissibili e tali che non esistono portafogli ammissibili $u(\cdot)$ tali per cui

$$\begin{cases} -\mathbb{E}[x(T;u(\cdot))] \le -\mathbb{E}[x(T;\bar u(\cdot))] \\ \mathrm{Var}[x(T;u(\cdot))] < \mathrm{Var}[x(T;\bar u(\cdot))] \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -\mathbb{E}[x(T;u(\cdot))] < -\mathbb{E}[x(T;\bar u(\cdot))] \\ \mathrm{Var}[x(T;u(\cdot))] \le \mathrm{Var}[x(T;u(\cdot))] \end{cases} .$$

La "frontiera efficiente" (ottimale) E è il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$:

$$E \triangleq \{ (-\mathbb{E}[x(T;\bar u(\cdot))], \mathrm{Var}[x(T;\bar u(\cdot))]) \mid \bar u(\cdot) \text{ è un portafoglio efficiente} \} .$$

($\Rightarrow$ ▹ Il problema è quello di determinare i portafogli efficienti e la frontiera efficiente.)

OSSERVAZIONE. Poniamo $x_0 \triangleq \sum_{i=0}^m N_i(0) p_i$ (>0) e poniamo $B(\cdot) \in L^\infty(0,T;\hat{\mathbb{R}}_+^{1\times m})$,

$$B(t) \triangleq (b_1(t) - r(t), \dots, b_m(t) - r(t)) .$$

Allora, per ogni $u(\cdot) \in L^2_F(0,T;\mathbb{R}^m)$, $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,;u(\cdot))$ è tale che $(dN_i(t) \equiv 0)$

$$\begin{cases} dx(t) = \left\{ r(t)x(t) + \sum_{i=1}^m [b_i(t) - r(t)] u_i(t) \right\} dt + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \sigma_{ij}(t) u_i(t)\, dW^j(t) = \\ \quad = [r(t)x(t) + B(t)u(t)]\, dt + \underbrace{u(t)^T \sigma(t) \cdot dW(t)}_{\left(\sum_j \sigma^{j}(t)^T u(t)\, dW^j(t)\right)}, \quad t \in [0,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \\ x(0) = x_0, \quad P\text{-q.c.} \end{cases}$$

(forward SDE lineare)

$\boxed{\text{Problema } P(\mu), \text{ assegnato } \mu \in \widehat{\mathbb{R}}_+ :}$ minimizzare $\overbrace{-\mathbb{E}[x(T;u(\cdot))] + \mu \operatorname{Var}[x(T;u(\cdot))]}^{J(u(\cdot);\mu) \equiv}$

(per avere il funzionale costo a valori reali)

al variare delle coppie $(x(\cdot;u(\cdot)), u(\cdot)) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}) \times \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)$ tali che, se $x(\cdot) \equiv x(\cdot;u(\cdot))$, allora

$$dx(t) = [r(t)x(t) + B(t)u(t)]dt + u(t)^T\sigma(t) \cdot dW(t), \quad \forall t \in [0,T] \text{ e } P\text{-q.c.},$$
$$x(0) \equiv x_0, \quad P\text{-q.c.}.$$

(problema equivalente al MVO)

$\boxed{\text{Problema } A(\lambda,\mu), \text{ assegnati } \mu \in \widehat{\mathbb{R}}_+ \text{ e } \lambda \in \mathbb{R} :}$ minimizzare

(per „cominciare a rimuovere il quadrato fuori")

$$\boxed{J(u(\cdot);\mu,\lambda) \triangleq \mathbb{E}[\mu x(T;u(\cdot))^2 - \lambda x(T;u(\cdot))]}$$

al variare delle coppie $(x(\cdot;u(\cdot)), u(\cdot)) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}) \times \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)$ tali che, se $x(\cdot) \equiv x(\cdot;u(\cdot))$, allora

$$dx(t) = [r(t)x(t) + B(t)u(t)]dt + u(t)^T\sigma(t) \cdot dW(t), \quad \forall t \in [0,T] \text{ e } P\text{-q.c.},$$
$$x(0) \equiv x_0, \quad P\text{-q.c.}.$$

$\boxed{\text{Osservazione:}}$ quale che sia $\mu \in \widehat{\mathbb{R}}_+$, se $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)$ è un controllo ottimale per il Problema $P(\mu)$, e se $\bar{x}(\cdot) \equiv x(\cdot;\bar{u}(\cdot))$, allora $\bar{u}(\cdot)$ è ~~ottimo~~ ottimale pure per un opportuno Problema $A(\lambda,\mu)$: precisamente, per il Problema $A(\bar{\lambda},\mu)$ con

$$\boxed{\bar{\lambda} \triangleq 1 + 2\mu\mathbb{E}[\bar{x}(T)]}.$$

(ma in generale NON vale il viceversa)

Dim. (assegnato $\mu \in \widehat{\mathbb{R}}_+$) Consideriamo la funzione polinomiale $\pi(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi(x,y) \triangleq \mu x - \mu y^2 - y$ in modo che, per ogni $u(\cdot) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)$ e $x(\cdot) \equiv x(\cdot;u(\cdot))$, sia

$$\pi(\mathbb{E}[x(T)^2], \mathbb{E}[x(T)]) = \mu\operatorname{Var}(x(T)) - \mathbb{E}[x(T)] = J(u(\cdot);\mu) : \text{ dunque, per}$$

ipotesi, $\quad \pi(\mathbb{E}[\bar{x}(T)^2], \mathbb{E}[\bar{x}(T)]) \le \pi(\mathbb{E}[x(T)^2], \mathbb{E}[x(T)])$.

D'altra parte, visto che $\pi(\cdot)$ è concava su $\mathbb{R}^2$ $(\mu > 0)$, e che $\pi_x(x,y) \equiv \mu$ e $\pi_y(x,y) = -(1 + 2\mu y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, abbiamo che

(formula generale : $\pi(x,y) - \pi(\bar{x},\bar{y}) \le \nabla\pi(\bar{x},\bar{y})^T \begin{pmatrix} x-\bar{x} \\ y-\bar{y} \end{pmatrix}$)

$$0 \le \pi(\mathbb{E}[x(T)^2], \mathbb{E}[x(T)]) - \pi(\mathbb{E}[\bar{x}(T)^2], \mathbb{E}[\bar{x}(T)]) \le$$

$$\le \mu(\mathbb{E}[x(T)^2] - \mathbb{E}[\bar{x}(T)^2]) - \underbrace{(1 + 2\mu\mathbb{E}[\bar{x}(T)])}_{\triangleq \bar{\lambda}}(\mathbb{E}[x(T)] - \mathbb{E}[\bar{x}(T)]) =$$

$$= \mathbb{E}[\mu x(T)^2 - \bar{\lambda}x(T)] - \mathbb{E}[\mu\bar{x}(T)^2 - \bar{\lambda}\bar{x}(T)] = J(u(\cdot);\mu,\bar{\lambda}) - J(\bar{u}(\cdot);\mu,\bar{\lambda}).$$

~~IDEA RISOLUTIVA~~ $\boxed{\text{OSSERVAZIONE.}}$ Per ogni $(\mu,\lambda) \in \widehat{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}$, poniamo $\boxed{\gamma \triangleq \frac{\lambda}{2\mu}} \in \mathbb{R}$ e, per ogni $x(\cdot) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$, poniamo

$y(\cdot) \equiv y(\cdot\,; x(\cdot), \gamma) : [0,T] \to \mathbb{R}$, $\boxed{y(t) \triangleq x(t) - \gamma}$ $\left(\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})\right)$. Allora

$$\mu\, y(T)^2 = \mu\, x(T)^2 - \mu(\underbrace{2\gamma}_{\lambda} x(T)) + \mu\gamma^2 =$$

$$= \left[\mu\, x(T)^2 - \lambda\, x(T)\right] + \underbrace{\mu\gamma^2}_{\text{"costante" in } x(\cdot)}.$$

Riscrittura del Problema $A(\lambda,\mu)$, assegnati $\mu \in \hat{\mathbb{R}}_+$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, come Problema (SLQ) (non standard) —("ma non impossibile"): posto $\boxed{\gamma \triangleq \frac{\lambda}{2\mu}}$, minimizzare

$$\boxed{J(u(\cdot);\gamma) \triangleq \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\mu\, y(T; u(\cdot))^2\right]}$$

al variare delle coppie

$(y(\cdot\,; u(\cdot), \gamma), u(\cdot)) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}) \times L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)$ tali che

$y(\cdot\,; u(\cdot), \gamma) \triangleq x(\cdot\,; u(\cdot)) - \gamma$ e, se $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,; u(\cdot))$, allora

$$\begin{cases} dx(t) = [r(t)x(t) + B(t)u(t)]\,dt + u(t)^T \sigma(t)\cdot dW(t), & t \in [0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}, \\ x(0) \equiv x_0, & P\text{-q.c.} \end{cases} :$$

cioe', posti:

$$\begin{cases} A(\cdot) \in L^\infty(0,T;\hat{\mathbb{R}}_+), & A(t) \triangleq r(t) \\ b(\cdot) \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}), & b(t) \triangleq \gamma r(t) \\ D(\cdot) \equiv (D^{(1)}(\cdot), \dots, D^{(m)}(\cdot)) \in \left(L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{1\times m})\right)^m, & D^{(j)}(t) \triangleq \sigma^{(j)}(t)^T \end{cases},$$

tali che

$$\begin{cases} dy(t) = [A(t)y(t) + B(t)u(t) + b(t)]\,dt + \sum_{j=1}^{m} D_j(t)u(t)\,dW^j(t), & t \in [0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}, \\ y(0) \equiv x_0 - \gamma, & P\text{-q.c.} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE. Rispetto alle notazioni generali, abbiamo che $n = 1$, $k = m$, $s = 0$, $y = x_0 - \gamma$; $A(\cdot), B(\cdot), b(\cdot), D(\cdot)$ sono quelle sopra, $G = \mu$ mentre $C(\cdot) \equiv 0$, $\sigma(\cdot) \equiv 0$, $Q(\cdot) \equiv 0$, $S(\cdot) \equiv 0$ e $\underbrace{R(\cdot) \equiv 0}_{(\Rightarrow \text{non standard})}$. (In particolare, $R + D^T G D = \mu\, \sigma\sigma^T \geq 0$, anzi $\gg 0$, per ipotesi.)

IDEA RISOLUTIVA: Se esistono $\mu \in \mathbb{R}_+$ e $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^m)$ tali che $\bar{u}(\cdot)$ sia un controllo (il...) ottimale per il Problema $P(\mu)$, e se $\bar{\lambda} \triangleq 1 + 2\mu\, \mathbb{E}[x(T;\bar{u}(\cdot))]$ e $\bar{\gamma} \triangleq \frac{\bar{\lambda}}{2\mu}$, allora determinare la forma feedback di $\bar{u}(\cdot)$ rispetto a $\bar{y}(\cdot) \equiv y(\cdot;\bar{u}(\cdot),\bar{\gamma}) \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$ $\equiv x(\cdot;\bar{u}(\cdot)) - \bar{\gamma}$ (molto naturale) (e ai suoi coefficienti) in quanto del controllo ottimale per il Problema $A(\bar{\lambda},\mu)$ (riscritto come Problema (SLQ)) grazie al teorema di ottimalità via l'equazione di Riccati stocastica. Quindi risolvere la SDE del (grazie di Itô) $\bar{x}(\cdot) \equiv x(\cdot;\bar{u}(\cdot))$ in funzione solo di $\bar{x}(\cdot)$ stesso (e dei suoi coefficienti), trovare la SDE di $\bar{x}(\cdot)^2$ (grazie alla formula di Itô), e trovare così $\mathbb{E}[\bar{x}(T)]$ e $\mathbb{E}[\bar{x}(T)^2]$ (in funzione dei suoi coefficienti), ed essendo (in particolare) $\bar{\lambda} = 1 + 2\mu\, \mathbb{E}[\bar{x}(T)]$ e quindi $\bar{\gamma} = \frac{\bar{\lambda}}{2\mu}$ (altro scalare che compare in $\bar{u}(\cdot)$), dunque infine $\mathrm{Var}[\bar{x}(T)]$ e, in definitiva, la frontiera efficiente E risultante.

L'equazione di Riccati stocastica e la mappa ψ:

(risulta lineare con $m=1$ (perché $n=1$ e $S(\cdot)\equiv 0$, $Q(\cdot)\equiv 0$, $R(\cdot)\equiv 0$!))

$$
\begin{cases}
\dot{P}(t) = -2A(t)P(t) + B(t)\Big[\underbrace{\sum_{j=1}^{m} D^{(j)}(t)^T D^{(j)}(t)}_{(\equiv \sigma(t)\sigma(t)^T)}\Big]^{-1} B(t)^T P(t) = \\
\quad = \{B(t)[\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1}B(t)^T - 2A(t)\}P(t), \quad \text{q.o. } t\in[0,T], \\
P(T) = \mu \\
P(t)(\sigma(t)\sigma(t)^T) > 0, \quad \text{q.o. } t\in[0,T], \quad (\Leftrightarrow P(\cdot)>0)
\end{cases}
$$

nell'incognita $P(\cdot) \in C([0,T];\hat{\mathbb{R}})$; e $\psi(\cdot): [0,T] \to \mathbb{R}^m$,

$$
\boxed{\psi(t) \triangleq [\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1} B(t)} \qquad (\Rightarrow B(\cdot)\psi(\cdot),\ D(\cdot)\psi(\cdot) \in \mathcal{L}^\infty(0,T;\mathbb{R}^m)).
$$

(NON dipende esplicitamente da $P(\cdot)$)

Poniamo $\rho(\cdot): [0,T] \to \mathbb{R}$, $\boxed{\rho(t) \triangleq B(t)[\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1}B(t)^T}$. Allora

$$
\begin{cases}
\dot{P}(t) = [\rho(t) - 2r(t)]P(t), \quad \text{q.o. } t\in[0,T], \\
P(T) = \mu \\
P(t)(\sigma(t)\sigma(t)^T) > 0, \quad \text{q.o. } t\in[0,T]
\end{cases}
$$

(ODE lineare backward) (omogenea)

: chiaramente

$$
\boxed{P(t) = \mu \exp\Big(-\int_t^T (\rho(s) - 2r(s))\,ds\Big), \quad t\in[0,T]}.
$$

(>0 ovviamente)

La ODE lineare associata all'equazione di Riccati stocastica e la mappa f:

$$\begin{cases}\dot{\varphi}(t) = -\left\{A(t) - B(t)\left[\sigma(t)\sigma(t)^T\right]^{-1}B(t)^T\right\}^T\varphi(t) - P(t)b(t), & \text{q.o. } t\in[0,T],\\ \varphi(T) = 0, \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases}\dot{\varphi}(t) = [\rho(t)-\pi(t)]\varphi(t) - \gamma\pi(t)P(t), & \text{q.o. } t\in[0,T],\\ \varphi(T) = 0 \end{cases}$$

(NON-omogenea backward)(*)

(limitatezza coefficienti $\Rightarrow \exists!\, \varphi(\cdot) \overset{\neq 0}{\ }$ su tutto $[0,T]$ liscia) ; e $f:[0,T]\to\mathbb{R}^m$,

$$\boxed{f(t) \triangleq \left[\sigma(t)\sigma(t)^T\right]^{-1}B(t)^T\,\frac{\varphi(t)}{P(t)}} \quad \left(=\Psi(t)\frac{\varphi(t)}{P(t)}\right). \qquad \left(\Rightarrow B(\cdot)f(\cdot),\ D(\cdot)f(\cdot) \in L^2(0,T;\mathbb{R})\right).$$

Applicazione del teorema di ottimalità via l'equazione di Riccati stocastica:

per ogni $(\mu,\lambda)\in\hat{\mathbb{R}}_+\times\mathbb{R}$, e se $\gamma\triangleq\frac{\lambda}{2\mu}$, allora esiste uno ed un solo controllo ottimale $\bar{u}(\cdot)$ per il Problema $A(\lambda,\mu)$ (in forma di Problema (SLQ)) ed è esprimibile in forma feedback

$$\bar{u}(t) = -\Psi(t)x(t;u(\cdot),\gamma) - f(t) =$$

$$= -\left[\sigma(t)\sigma(t)^T\right]^{-1}B(t)^T\left(x(t;u(\cdot),\gamma) + \frac{\varphi(t)}{P(t)}\right), \quad \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}:$$

cioè, se $\bar{x}(\cdot)\equiv x(\cdot;\bar{u}(\cdot))$, allora

$$\boxed{\bar{u}(t) = -\left[\sigma(t)\sigma(t)^T\right]^{-1}B(t)^T\left(\frac{\varphi(t)}{P(t)} - \gamma + \bar{x}(t)\right), \quad \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}}.$$

("premio al rischio")

OSSERVAZIONE.(*) Poniamo $h(\cdot):[0,T]\to\mathbb{R}$, $h(t)\triangleq\frac{\varphi(t)}{P(t)}$. Allora

$$\begin{cases}\dot{h}(t) = \pi(t)h(t) - \gamma\pi(t), & t\in[0,T],\\ h(T) = 0\end{cases}$$

cioè (chiaramente)

$$\boxed{h(t) = \gamma\left[1 - \exp\left(-\int_t^T \pi(s)\,ds\right)\right], \quad t\in[0,T]}. \quad (\text{Da cui } \varphi(t) = h(t)P(t).)$$

[Verifica: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi}{P}\right) = \frac{P\dot{\varphi} - \dot{P}\varphi}{P^2} = \frac{P[(\rho-\pi)\varphi - \gamma\pi P] - (\rho-2\pi)P\varphi}{P^2} = \frac{\pi P\varphi - \gamma\pi P^2}{P^2} =$

$= \frac{\pi q}{\rho} - \gamma \pi = \pi h - \gamma \pi .]$ Dunque

$$\bar{u}(t) = [\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1} B(t)^T \left[\gamma \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) - \bar{x}(t)\right], \quad \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}$$

$\boxed{\text{Riscrittura di } d\bar{x}(\cdot):}$ $\begin{cases} d\bar{x}(t) = [r(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t)]dt + \bar{u}(t)^T\sigma(t)\cdot dW(t), & t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.} \\ \bar{x}(0) \equiv x_0, \quad P\text{-q.c.}, \end{cases}$ diventa

$$d\bar{x}(t) = \left\{[r(t) - \rho(t)]\bar{x}(t) + \gamma \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\rho(t)\right\}dt +$$

$$+ B(t)[\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1}\sigma(t)\left[\gamma\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) - \bar{x}(t)\right]\cdot dW(t), \quad \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.},$$

$\bar{x}(0) \equiv x_0, \quad P\text{-q.c.}$

$\boxed{\text{Scrittura di } d\bar{x}(\cdot)^2:}$ grazie alla formula di Itô,

$$d\bar{x}(t)^2 = \left\{[2r(t) - \rho(t)]\bar{x}(t)^2 + \gamma^2\exp\left(-2\int_t^T r(s)ds\right)\rho(t)\right\}dt +$$

$$+ 2\bar{x}(t)B(t)[\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1}\sigma(t)\left[\gamma\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) - \bar{x}(t)\right]dW(t), \quad \text{q.o. } t\in[0,T] \text{ e } P\text{-q.c.}$$

$\bar{x}(0)^2 \equiv x_0^2, \quad P\text{-q.c.}$

$\boxed{\text{Verifica.}}$ $d\bar{x}(t)^2 = 2\bar{x}(t)d\bar{x}(t) + d[x](t)$, dove $d\bar{x}(t)$ è data sopra e dove quindi $d[x](t) =$

$$= \left[\gamma\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) - \bar{x}(t)\right]^2 B(t)[\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1}\sigma(t)\{B(t)[\sigma(t)\sigma(t)^T]^{-1}\sigma(t)\}^T dt =$$

$$= \left[\gamma\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) - \bar{x}(t)\right]^2 \rho(t)dt \;.]$$

$\boxed{\text{Scrittura di } d\mathbb{E}[\bar{x}(\cdot)] \text{ e } d\mathbb{E}[\bar{x}(\cdot)^2]:}$ (strutturalmente analoghe)

$$d\mathbb{E}[\bar{x}(t)] = \left\{[r(t) - \rho(t)]\mathbb{E}[\bar{x}(t)] + \gamma\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\rho(t)\right\}dt, \quad \text{q.o. } t\in[0,T],$$

$\mathbb{E}[\bar{x}(0)] = x_0$,

$$d\mathbb{E}[\bar{x}(t)^2] = \left\{[2r(t) - \rho(t)]\mathbb{E}[\bar{x}(t)^2] + \gamma^2\exp\left(-2\int_t^T r(s)ds\right)\rho(t)\right\}dt, \quad \text{q.o. } t\in[0,T],$$

$\mathbb{E}[\bar{x}(0)^2] = x_0^2$. (forward ODEs lineari non-omogenee)

OSSERVAZIONE. ~~Sappiamo benissimo~~ / È chiaro molto che, data una ed una sola soluzione

dati $\rho(\cdot), h(\cdot) \in L^\infty([0,T];\mathbb{R})$

Risulta $y(\cdot)\in C([0,T];\mathbb{R})$ ~~delle~~ ODE lineari non-omogenee della forma

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + f(t), & t\in[0,T] \\ y(0) = y_0 \end{cases},$$

ed è

$$y(t) = \exp\Big(\int_0^t a(s)ds\Big)\Big\{ y_0 + \int_0^t f(s)\exp\Big(-\int_0^s a(\tau)d\tau\Big)ds\Big\}, \quad t\in[0,T].$$

Grazie a tale formula è immediato ottenere che

$$\begin{cases} \mathbb{E}[x(t)] = \exp\Big(\int_0^t [r(s)-\rho(s)]ds\Big)x_0 + \overbrace{\gamma}^{\exp(-\int_t^T r(s)ds)}\Big[1-\exp\Big(-\int_0^t \rho(s)ds\Big)\Big], & t\in[0,T], \\ \mathbb{E}[x(t)^2] = \exp\Big(\int_0^t [2r(s)-\rho(s)]ds\Big)x_0^2 + \underbrace{\gamma^2}_{\exp(-\int_t^T 2r(s)ds)}\Big[1-\exp\Big(-\int_0^t \rho(s)ds\Big)\Big], & t\in[0,T]. \end{cases}$$

[$\boxed{\text{Verifica}}$ (per la prima).
$$\begin{cases} y'(t) = (r(t)-\rho(t))y(t) + \gamma\exp\Big(-\int_t^T r(s)ds\Big)\rho(t), & t\in[0,T], \\ y(0) = x_0 \end{cases} \iff$$

$$y(t) = \exp\Big(\int_0^t [r(s)-\rho(s)]ds\Big)\Big\{x_0 + \gamma\int_0^t \rho(s)\underbrace{\exp\Big(-\int_s^T r(\tau)d\tau\Big)\exp\Big(-\int_0^s [r(\tau)-\rho(\tau)]d\tau\Big)}_{\left(=\exp\left(\int_0^s \rho(\tau)d\tau - \int_0^T r(\tau)d\tau\right)\right)}ds\Big\} =$$

$$= \exp\Big(\int_0^t [r(s)-\rho(s)]ds\Big)x_0 + \overbrace{\gamma}^{\exp(-\int_0^t \rho(s)ds)}\exp\Big(-\int_t^T r(s)ds\Big)\underbrace{\int_0^t \rho(s)\exp\Big(\int_0^s \rho(\tau)d\tau\Big)ds}_{\left(=\left[\exp\left(\int_0^s \rho(\tau)d\tau\right)\right]_{s=0}^{s=t} = \exp\left(\int_0^t \rho(s)ds\right)-1\right)} =$$

$$= \exp\Big(\int_0^t [r(s)-\rho(s)]ds\Big)x_0 + \gamma\exp\Big(-\int_t^T r(s)ds\Big)\Big[1-\exp\Big(-\int_0^t \rho(s)ds\Big)\Big].\ ]$$

$\boxed{\text{Scrittura esplicita di } \mathbb{E}[\bar{x}(T)] \text{ e } \mathbb{E}[\bar{x}(T)^2]:}$ posto

$$\begin{cases} \alpha \triangleq \exp\Big(\int_0^T [r(t)-\rho(t)]dt\Big) \ (>0) \\ \delta \triangleq \exp\Big(\int_0^T [2r(t)-\rho(t)]dt\Big) \ (>0) \\ \beta \triangleq 1-\exp\Big(-\int_0^T \rho(t)dt\Big) \ (<1) \end{cases},$$

è

$$\boxed{\begin{cases} \mathbb{E}[\bar{x}(T)] = \alpha x_0 + \beta\gamma \\ \mathbb{E}[\bar{x}(T)^2] = \delta x_0^2 + \beta\gamma^2 \end{cases}}$$

$(\Rightarrow \beta\gamma = \mathbb{E}[\bar{x}(T)] - \alpha x_0)$.

$\boxed{\text{OSSERVAZIONE.}}$ ⊙ $1-\beta = \exp\left(-\int_0^T \rho(t)dt\right)$ (>0), quindi $\frac{1}{1-\beta} = \exp\left(\int_0^T \rho(t)dt\right)$.

⊙ $\frac{\alpha}{1-\beta} = \exp\left(\int_0^T r(t)dt\right)$ e $\frac{\delta}{1-\beta} = \exp\left(2\int_0^T r(t)dt\right)$ e $\frac{\delta}{\alpha} = \exp\left(\int_0^T r(t)dt\right) = \frac{\alpha}{1-\beta}$.

⊙ $\beta\delta = \delta - \alpha^2$.

In particolare, $\frac{\beta\delta+\alpha^2}{\alpha} = \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\alpha}{1-\beta}$ o anche

$$\boxed{\frac{\beta\delta+\alpha^2}{1-\beta} = \left(\frac{\alpha}{1-\beta}\right)^2} = \exp\left(2\int_0^T r(t)dt\right).$$

$\boxed{\text{Scrittura di } \bar\lambda:}$ $\bar\lambda \triangleq 1+2\mu E[\bar x(T)] = \boxed{\exp\left(\int_0^T \rho(t)dt\right) + 2\mu x_0 \exp\left(\int_0^T r(t)dt\right)}$.

[$\boxed{\text{Verifica.}}$ $\bar\lambda = 1+2\mu\left(\alpha x_0 + \beta\frac{\bar\lambda}{2\mu}\right) = 1+2\mu\alpha x_0 + \beta\bar\lambda$, cioè $\bar\lambda = \frac{1+2\mu x_0\alpha}{1-\beta} \; (>0) =$

$= \frac{1}{1-\beta} + 2\mu x_0 \frac{\alpha}{1-\beta}$.]

In particolare, se $\bar\gamma \triangleq \frac{\bar\lambda}{2\mu}$, allora $\bar u(t) = (\sigma(t)\sigma(t)^T)^{-1} b(t)^T \left[\bar\gamma \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) - \bar x(t)\right]$.

$$\left(= \frac{1}{2\mu}\exp\left(\int_0^T \rho(t)dt\right) + x_0 \exp\left(\int_0^T r(t)dt\right)\right)$$

$\boxed{\text{Conclusione: scrittura di } Var[\bar x(T)] \text{ e della frontiera efficiente:}}$ è

$$Var[\bar x(T)] = \frac{\exp\left(-\int_0^T \rho(t)dt\right)}{1-\exp\left(-\int_0^T \rho(t)dt\right)} \cdot \left[E[\bar x(T)] - x_0\exp\left(\int_0^T r(t)dt\right)\right]^2$$

$$E[\bar x(T)] = \left\{x_0 \exp\left(\int_0^T [r(t)-\rho(t)]dt\right) + \bar\gamma\left(1-\exp\left(-\int_0^T \rho(t)dt\right)\right)\right\}$$

$$\left(\bar\gamma = \frac{1}{2\mu}\exp\left(\int_0^T \rho(t)dt\right) + x_0\exp\left(\int_0^T r(t)dt\right)\right).$$

$\boxed{\text{Verifica.}}$ $Var[\bar x(T)] = E[\bar x(T)^2] - E[\bar x(T)]^2 =$

$$= \delta x_0^2 + \beta\bar\gamma^2 - \underbrace{(\alpha x_0 + \beta\bar\gamma)^2}_{(=\alpha^2x_0^2 + 2\alpha\beta x_0\bar\gamma + \beta^2\bar\gamma^2)} =$$

$$= \beta(1-\beta)\bar\gamma^2 - 2\alpha\beta x_0\bar\gamma + (\delta-\alpha^2)x_0^2 =$$

(cerchiamo di usare che $\beta\bar\gamma = E[\bar x(T)] - \alpha x_0$)

$$= \frac{1-\beta}{\beta}\left\{\beta^2\bar\gamma^2 - 2\frac{\alpha\beta^2 x_0\bar\gamma}{1-\beta} + \frac{\beta(\delta-\alpha^2)}{1-\beta}x_0^2\right\} =$$

$$= \frac{1-\beta}{\beta}\left\{ (\beta\bar{\gamma}+\alpha x_0)^2 - 2\frac{\alpha\beta x_0\bar{\gamma}}{1-\beta} + \frac{\beta\delta-\alpha^2}{1-\beta}x_0^2 \right\}$$

$$\left(\text{perché } (\beta\bar{\gamma}+\alpha x_0)^2 = \beta^2\bar{\gamma}^2 + 2\alpha\beta x_0\bar{\gamma} + \alpha^2 x_0^2 = \right.$$

$$\left. = \beta^2\bar{\gamma}^2 + \frac{2\alpha\beta x_0\bar{\gamma}(1-\beta) + \alpha^2 x_0^2(1-\beta)}{1-\beta} \right)$$

$$= \quad (\beta\bar{\gamma} = \mathbb{E}[\bar{x}(T)] - \alpha x_0)$$

$$= \frac{1-\beta}{\beta}\left\{ \mathbb{E}[\bar{x}(T)]^2 - 2\underbrace{\frac{\alpha}{1-\beta}}_{= \left(\exp\left(\int_0^T r(t)dt\right)\right)} x_0\, \mathbb{E}[\bar{x}(T)] + \underbrace{\frac{\beta\delta+\alpha^2}{1-\beta}}_{= \left(\left(\frac{\alpha}{1-\beta}\right)^2\right)} x_0^2 \right\} =$$

$$= \frac{1-\beta}{\beta}\left\{ \mathbb{E}[\bar{x}(T)] - x_0\exp\left(\int_0^T r(t)dt\right) \right\}^2 . \Big]$$

VARI ESEMPI/ESERCIZI PIÙ ELEMENTARI.

$\boxed{\text{ES. 1.}}$ $\boxed{a}$ Consideriamo il seguente Problema (DLQ) con $n=k=1$: assegnata $R(\cdot) \in L^\infty(0,1;\mathbb{R})$ con $\underline{R \overset{q.o.}{<} 0}$, minimizzare

$$J(0,0;u(\cdot)) \equiv \frac{1}{2}\int_0^1 [x(t)^2 + R(t)u(t)^2]dt + \frac{1}{2}x(1)^2$$

al variare delle $u(\cdot) \in L^2(0,1;\mathbb{R})$ e $x(\cdot) \equiv x(\cdot;u(\cdot)) \in L^2(0,1;\mathbb{R})$ tali che

$$\begin{cases} dx(t) = 0, & t\in[0,1], \\ x(0)=0 \end{cases}.$$ Dimostrare che il problema non è „finito", ossia che è mal posto.

$\boxed{b}$ Consideriamo il seguente Problema (SLQ) con $n=k=m=1$: assegnata $R(\cdot) \in L^\infty(0,1;\mathbb{R})$ con $\underline{R(t) \overset{q.o.}{>} t-2}$, minimizzare

$$J(0,0;u(\cdot)) \equiv \mathbb{E}^P\left[\frac{1}{2}\int_0^1 [x(t)^2 + R(t)u(t)^2]dt + \frac{1}{2}x(1)^2 \right]$$

al variare delle $u(\cdot) \equiv (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot), u(\cdot))$ e $x(\cdot) \equiv x(\cdot;u(\cdot)) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,1;\mathbb{R})$ tali che $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P, W(\cdot))$ sia uno spazio di probabilità completo con $\mathbb{F} \equiv \mathbb{F}^W \equiv$ $\equiv$ «la filtrazione generata dal Wiener $W(\cdot)$ su Ω», e $u(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,1;\mathbb{R})$, ed inoltre

$$\begin{cases} dx(t) = u(t)\,dW(t), & t\in[0,1], \\ x(0) \equiv 0 \end{cases}$$

(P-q.c.). Dimostrare che il problema è univocamente risolubile e che il controllo ottimale (in senso debole) è esprimibile in forma feedback.

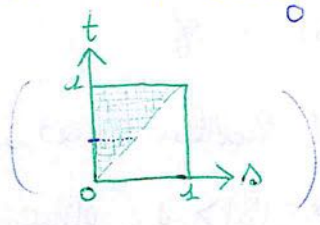
Dim. $\boxed{a}$ Semplicemente $x(\cdot)\equiv 0$ (per ogni $u(\cdot)\in L^2(0,1;\mathbb{R})$), per cui $J(0,0;u(\cdot)) =$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 R(t)u(t)^2\,dt$ e si tratta di un problema (DLQ) col "R" <0. ✓

(in effetti, $J(0,0;u(\cdot)) \to -\infty$ per $|u(\cdot)|\to+\infty$)

$\boxed{b}$ È $x(t) = \int_0^t u(s)\,dW(s)$ (per ogni $u(\cdot)\equiv(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=\mathbb{F}^W,P,W(\cdot),u(\cdot))\in L^2_{\mathbb{F}}(0,1;\mathbb{R})$), che ha (grazie alla formula d'isometria di Itô) $\mathbb{E}^P[x(1)^2] = \mathbb{E}^P[\int_0^1 u(t)^2\,dt]$

e $\mathbb{E}^P[\int_0^1 x(t)^2\,dt] = \mathbb{E}^P[\int_0^1(\int_0^t u(s)^2\,ds)\,dt] =$



$= \mathbb{E}^P[\int_0^1(\int_s^1 u(s)^2\,dt)\,ds] = \mathbb{E}^P[\int_0^1 u(s)^2(1-s)\,ds]$:

pertanto $J(0,0;u(\cdot)) = \mathbb{E}^P[\frac{1}{2}\int_0^1 (R(t)+2-t)u(t)^2\,dt]$ ed il problema è standard. □

ES. 2. $\boxed{a}$ Consideriamo i tre seguenti problemi (DLQ) con $n=k=1$: assegnati $T\in(0,+\infty)$ e $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}$, minimizzare

$$\begin{cases} J_1(s,y;u(\cdot)) \equiv -\frac{1}{2}x(T)^2 & \to \text{Problema (DLQ) 1} \\ J_2(s,y;u(\cdot)) \equiv \frac{1}{2}\int_s^T x(t)^2\,dt & \to \text{Problema (DLQ) 2} \\ J_3(s,y;u(\cdot)) \equiv \frac{1}{2}\int_s^T u(t)^2\,dt - \frac{1}{2}x(T)^2 & \to \text{Problema (DLQ) 3} \end{cases}$$

al variare delle $u(\cdot)\in L^2(0,T;\mathbb{R})$ e $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))\in L^2(0,T;\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), & t\in[s,T], \\ x(s) = y \end{cases}$$

. Dimostrare che:

(i) il Problema (DLQ) 1 non è finito;

(ii) il Problema (DLQ) 2 è finito, ma è risolubile (univoc.) se, e solo se, $y=0$;

(iii) se $T\geq 1$ e $s>T-1$, allora il Problema (DLQ) 3 è univocamente risolubile.

$\boxed{b}$ Consideriamo i due seguenti Problemi (SLQ) con $n=k=m=1$: assegnati $T \in (0,+\infty)$, $(s,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}$ e $\delta \in \mathbb{R}$, minimizzare

$$\begin{cases} J_1(s,T;u(\cdot)) \equiv \mathbb{E}^P\left[\frac{1}{2}\int_s^T x(t)^2\,dt\right] \longrightarrow \text{Problema (SLQ) 1} \\ J_2(s,T;u(\cdot)) \equiv \mathbb{E}^P\left[\frac{1}{2}\int_s^T u(t)^2\,dt - \frac{1}{3}x(T)^2\right] \longrightarrow \text{Problema (SLQ) 2} \end{cases}$$

al variare delle $u(\cdot) \equiv (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}=\mathbb{F}^W, P, W(\cdot), u(\cdot)) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$ e $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,;u(\cdot)) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$ tale che (P-q.c.)

$$\begin{cases} dx(t) = u(t)\,dt + \delta u(t)\,dW(t), \quad t \in [s,T], \\ x(s) \equiv y \end{cases}$$

. Dimostrare che :

(i) il Problema (SLQ) 1 è univocamente risolubile in senso forte ;

(ii) se $|\delta| > 1$, allora il Problema (SLQ) 2 non è finito ;

(iii) se il sistema di controllo diventa

$$\begin{cases} dx(t) = \frac{1}{2}x(t)\,dt + u(t)\,dW(t), \quad t \in [s,T], \\ x(s) \equiv y \end{cases}$$

allora il Problema (SLQ) 2 resta non finito.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{a}$ Per ogni $u(\cdot) \in L^2(0,T;\mathbb{R})$, è $x(t) = y + \int_s^t u(r)\,dr$. (i) Per ogni $l \in \mathbb{R}$, $u_l(t) \equiv l$ è tale che $x_l(t) \equiv x(t;u_l(\cdot)) = y + l(t-s)$, per cui $J_1(s,y;u_l(\cdot)) = -\frac{1}{2}[y + l(T-s)]^2 \downarrow -\infty$ per $l \uparrow -\infty$. ✓

(ii) Anzitutto, per ogni $u(\cdot) \in L^2(0,T;\mathbb{R})$, è $J_2(s,y;u(\cdot)) \geq 0$. Ora, per ogni $\varepsilon \in (0, T-s)$, $u_\varepsilon(t) \equiv -\frac{y}{\varepsilon}\mathbb{1}_{[s,s+\varepsilon)}(t)$ è tale che $x_\varepsilon(t) \equiv x(t;u_\varepsilon(\cdot)) =$

$$= y - \frac{y}{\varepsilon}\int_s^t \mathbb{1}_{[s,s+\varepsilon)}(r)\,dr = \begin{cases} 0 & \text{per ogni } t \in [s+\varepsilon, T] \\ y\left(1 - \frac{t-s}{\varepsilon}\right) & \text{per ogni } t \in [s, s+\varepsilon] \end{cases},$$

per cui $J_2(s,y;u_\varepsilon(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_s^{s+\varepsilon} y^2\left(1 - \frac{t-s}{\varepsilon}\right)^2 dt = \frac{1}{2}y^2\left[\frac{\varepsilon}{3}\left(1 - \frac{t-s}{\varepsilon}\right)^3\right]_{t=s+\varepsilon}^{t=s} =$

$= \frac{y^2\varepsilon}{6} \downarrow 0$ per $\varepsilon \downarrow 0$: pertanto $V(s,y) = 0$ per ogni $(s,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}$

Tuttavia $J_2(s,y;u(\cdot))=0$ se, e solo se, $x(t;u(\cdot))\equiv 0$.

(iii) Visto che $\frac{d}{dt}\left(\frac{x(t)^2}{t+1-T}\right)=\frac{2x(t)\dot{x}(t)}{t+1-T}-\frac{x(t)^2}{(t+1-T)^2}=\frac{2x(t)u(t)}{t+1-T}-\frac{x(t)^2}{(t+1-T)^2}$ (su $[s,T]$), la classica formula di Newton-Leibniz dà subito che

$$x(T)^2=\frac{y^2}{s+1-T}+\int_s^T\left[\frac{2x(t)u(t)}{t+1-T}-\frac{x(t)^2}{(t+1-T)^2}\right]dt \quad \text{da cui}$$

$$J_3(s,y;u(\cdot))=-\frac{y^2}{2(s+1-T)}+\frac{1}{2}\int_s^T\left[u(t)-\frac{x(t)}{t+1-T}\right]^2dt$$: dunque la

$\bar{u}(\cdot)\in L^2(0,T;\mathbb{R})$ tale che $\bar{u}(t)=\frac{\bar{x}(t)}{t+1-T}$, dove $\bar{x}(\cdot)\equiv x(\cdot;\bar{u}(\cdot))$ ($\bar{x}(s)=y$ e $\dot{\bar{x}}(t)=\frac{\bar{x}(t)}{t+1-T}$), è l'unico controllo ottimale per il Problema (DLQ) 3 e vale $V(s,y)=\frac{-y^2}{2(s+1-T)}$ per ogni $(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}$.

$\boxed{b}$ (i) Sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=\mathbb{F}^W,P,W(\cdot))$ arbitrario. Consideriamo la $Z(\cdot)\in C([s,T];\mathbb{R})$ tale che $\begin{cases}\dot{Z}(t)=\frac{1}{\delta^2}Z(t)-1, & t\in[s,T],\\ Z(T)=0\end{cases}$ ossia $Z(t)\equiv\delta^2\left(1-e^{\frac{t-T}{\delta^2}}\right)$, $t\in[s,T]$.

Allora, per ogni $u(\cdot),x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$, è $0=\mathbb{E}^P[Z(T)x(T)^2]=$

$$=Z(s)y^2+\mathbb{E}^P\left[\int_s^T\left[\left(\frac{1}{\delta^2}Z(t)-1\right)x(t)^2+2Z(t)x(t)u(t)+Z(t)\delta^2u(t)^2\right]dt\right]$$

(integrando per parti) da cui immediatamente

$$J_1(s,y;u(\cdot))=\frac{1}{2}Z(s)y^2+\mathbb{E}^P\left[\frac{1}{2}\int_s^T\delta^2Z(t)\left[u(t)+\frac{x(t)}{\delta^2}\right]^2dt\right]$$: così

la $\bar{u}(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R})$ tale che $\bar{u}(t)=\frac{-\bar{x}(t;\bar{u}(\cdot))}{\delta^2}$ è l'unico controllo ottimale per il Problema (SLQ) 1 e vale $V(s,y)=\frac{1}{2}\delta^2\left(1-e^{\frac{s-T}{\delta^2}}\right)y^2$ per ogni $(s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}$.

(ii) Sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=\mathbb{F}^W,P,W(\cdot))$ arbitrario. Per ogni $\ell\in(0,+\infty)$ grande abbastanza affinché $s\le T-\frac{1}{\ell}$, $u_\ell(t)\equiv\ell\,\mathbb{1}_{[T-\frac{1}{\ell},T]}(t)$, $t\in[s,T]$, è tale che

$$x_\ell(t) \equiv x(t;u_\ell(\cdot)) = y + \int_s^t u_\ell(r)dr + \delta \int_s^t u_\ell(r)dW(r) =$$

$$= \begin{cases} y & \text{per ogni } t \in [s, T-\frac{1}{\ell}], \\ y + \ell(t-T+\frac{1}{\ell}) + \delta\ell(W(t)-W(T-\frac{1}{\ell})) & \text{per ogni } t \in [T-\frac{1}{\ell}, T] \end{cases}$$

per cui $\mathbb{E}^P[x_\ell(T)^2] = \mathbb{E}^P[[y+1+\delta\ell(W(T)-W(T-\frac{1}{\ell}))]^2] \underset{(W_t - W_s \sim N(0,t-s))}{=}$

$= (y+1)^2 + \delta^2\ell^2 \cdot \frac{1}{\ell} = (y+1)^2 + \delta^2\ell$ e allora

$$J_2(s,T;u_\ell(\cdot)) = \frac{\ell}{2} - \frac{(y+1)^2}{2} - \delta^2\ell = -\frac{(y+1)^2}{2} - (\delta^2-1)\frac{\ell}{2} \downarrow -\infty$$

per $\ell \uparrow +\infty$ (poiché $|\delta| > 1$). ✓

(iii) Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}=\mathbb{F}^W, P, W(\cdot))$ arbitrario. Se $z(t) \equiv -e^{T-t}$, $t \in [s,T]$, cioè

$$\begin{cases} \dot z(t) = -z(t), & t \in [s,T], \\ z(T) = -1 \end{cases}$$

, allora $\underset{(\text{int. parti})}{}$ $-\mathbb{E}[x(T)^2] = \mathbb{E}[z(T)x(T)^2] =$

$$= -e^{T-s}y^2 + \mathbb{E}^P\left[\int_s^T [e^{T-t}x(t)^2 - e^{T-t}2x(t)(\tfrac{1}{2}x(t)) - e^{T-t}u(t)^2]dt\right]$$

da cui $J_2(s,T;u(\cdot)) = \mathbb{E}^P\left[\frac{1}{2}\int_s^T \underbrace{(1-e^{T-t})}_{(<0)} u(t)^2 dt - \frac{1}{2}e^{T-s}y^2\right] \to -\infty$

per $|u(\cdot)| \to +\infty$. ✓ $\square$

$\boxed{\text{ES. 3.}}$ $\boxed{e}$ Consideriamo il seguente Problema (SLQ) con $n=k=m=1$:

minimizzare $J(0,0;u(\cdot)) \equiv \mathbb{E}^P\left[\int_0^1 [x(t)^2 - \frac{1}{2}u(t)^2]dt + x(1)^2\right]$ al variare

delle $u(\cdot) \equiv (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}=\mathbb{F}^W, P, W(\cdot), u(\cdot)) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,1;\mathbb{R})$ e $x(\cdot) \equiv x(\cdot;u(\cdot)) \in L^2_{\mathbb{F}}(0,1;\mathbb{R})$

tali che (P-q.c.)

$$\begin{cases} dx(t) = u(t)dW(t), & t \in [0,1], \\ x(0) \equiv 0 \end{cases}$$

. Dimostrare che:

(i) esiste uno ed un solo controllo ottimale, $\bar u(t) \equiv 0$, ed è in senso forte;

(ii) esiste uno ed un solo processo aggiunto del primo ordine $(p(\cdot), q(\cdot))$ associato alle coppie ottimale $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot)) \equiv (0,0)$, ed è $(p(t),q(t)) \equiv (0,0)$;

iii) esiste uno ed un solo processo aggiunto del second'ordine $(P(\cdot),\Lambda(\cdot))$ associato a $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot),p(\cdot),q(\cdot)) \equiv (0,0,0,0)$, ed è $(P(t),\Lambda(t)) \equiv (2t-4,0)$;

iv) se $H(t,x,u,p,q)$ è la funzione hamiltoniana $-H$ (del problema), e se $\mathcal{H}(t,x,u)$ è la funzione $-\mathcal{H}$ (del problema) associata a $(\bar{x}(\cdot),\bar{u}(\cdot),p(\cdot),q(\cdot),P(\cdot)) \equiv (0,0,0,0,2t-4)$, allora $\max\limits_{u\in\mathbb{R}} \mathcal{H}(t,\bar{x}(t),u) = \mathcal{H}(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) = 0$ mentre invece

$$+\infty = \sup_{u\in\mathbb{R}} H(t,\bar{x}(t),u,p(t),q(t)) > H(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),p(t),q(t)) = 0 .$$

$\boxed{b}$ Consideriamo il seguente Problema (WS) con $n=k=m=1$: minimizzare $J(u(\cdot)) \equiv \mathbb{E}^P\left[-\int_0^1 u(t)dt + \frac{1}{2}x(1)^2\right]$ al variare delle $u(\cdot)\equiv(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=\mathbb{F}^W,P,W(\cdot),u(\cdot)) \in \mathcal{L}^2(0,1;U)$, dove $U\equiv[0,1]$, e $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot)) \in \mathcal{L}^2(0,1;\mathbb{R})$ tale che P-q.c.)

$$\begin{cases} dx(t) = u(t)dW(t), & t\in[0,1], \\ x(0)\equiv 0 \end{cases}$$

. Dimostrare che $(\bar{x}(t),\bar{u}(t)) \equiv (W(t),1)$ è una coppia ottimale per tale problema.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{a}$ (i) Sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}=\mathbb{F}^W,P,W(\cdot))$ arbitrario. Torniamo a considerare l'$\boxed{\text{ES. 1}}$, punto $\boxed{b}$: se poniamo $J^1(0,0;u(\cdot)) \equiv \mathbb{E}^P\left[\frac{1}{2}\int_0^1[x(t)^2+R(t)u(t)^2]dt + \frac{1}{2}x(1)^2\right]$ dove $R(t) \triangleq -\frac{1}{4}$ $(>-1 \geq t-2)$, allora $J(0,0;u(\cdot)) = 2J^1(0,0;u(\cdot))$ (per ogni $u(\cdot)\in\mathcal{L}^2(0,1;U)$) ed inoltre, ricordando che

$$J^1(0,0;u(\cdot)) = \mathbb{E}^P\left[\frac{1}{2}\int_0^1(R(t)+2-t)u(t)^2dt\right],$$ deduciamo che

$$J(0,0;u(\cdot)) = \mathbb{E}^P\left[\int_0^1\left(\frac{3}{2}-t\right)u(t)^2dt\right],$$ da cui subito la tesi. ✓

ii) Osserviamo anzitutto che, rispetto alla notazione generale, tutti e soli i coefficienti non nulli sono $D(\cdot)\equiv 1$, $Q(\cdot)\equiv 2$, $R(\cdot)\equiv -1$ e $G\equiv 2$. Dunque è (P-q.c.)

$$\begin{cases} dp(t) = q(t)dW(t), & t\in[0,1], \\ p(1)\equiv 0 \end{cases}$$. ✓

iii) È (P-q.c.) $$\begin{cases} dP(t) = 2dt + \Lambda(t)dW(t), & t\in[0,1], \\ P(1)\equiv -2 \end{cases}$$. ✓

(iv) Abbiamo che $H(t,x,u,p) \equiv \frac{1}{2}u^2 - x^2$, $H(t,x,u,p,q) \equiv H(t,x,u,p) + uq$, $G(t,x,u,p,P) \equiv H(t,x,u,p) + \frac{1}{2}Pu^2$ e che

$$\mathcal{H}(t,x,u) = G(t,x,u,p(t),P(t)) + uq(t) - P(t)u\bar{u}(t) = \frac{1}{2}(1+P(t))u^2 - x^2$$

In particolare, $H(t,\bar{x}(t),u,p(t),q(t)) = \frac{1}{2}u^2$ mentre

$$\mathcal{H}(t,x,u) = \frac{1}{2}(2t-3)u^2 \quad (\leq 0).$$

($\Rightarrow P(\cdot)$ che "rende" H da convessa a $\mathcal{H}$ concava!)

$\boxed{b}$ Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}=\mathbb{F}^W, P, W(\cdot))$ arbitrario. Rispetto alle notazioni generali, abbiamo che $b(t,x,u) \equiv 0$, $\sigma(t,x,u) = u$, $f(t,x,u) = -u$ e $h(x) = \frac{1}{2}x^2$. Osserviamo così che tutte le condizioni (S0)–(S4) sussistono, e che $h(\cdot)$ è convessa su $\mathbb{R}$.

Ora, data $(x(\cdot),u(\cdot)) \in L^2(0,1;\mathbb{R}) \times L^2(0,1;[0,1])$, il processo aggiunto del prim'ordine $(p(\cdot),q(\cdot))$ associato a $(x(\cdot),u(\cdot))$ è tale che (P-q.c.)

$$\begin{cases} dp(t) = q(t)dW(t), & t\in[0,1], \\ p(1) = -x(1) \end{cases}$$

. D'altra parte le "hamiltoniane" del problema sono $H(t,x,u,p) = u$, $H(t,x,u,p,q) = u(1+q)$ e $G(t,x,u,p,P) = \frac{1}{2}Pu^2 + u$. Dunque il processo aggiunto del second'ordine $(P(\cdot),Q(\cdot))$ associato a $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),q(\cdot))$ è tale che (P-q.c.)

$$\begin{cases} dP(t) = Q(t)dW(t), & t\in[0,1], \\ P(1) \equiv -1 \end{cases}$$

, cioè $(P(t),Q(t)) \equiv (-1,0)$ costante.

Pertanto la funzione-$\mathcal{H}$ associata a $(x(\cdot),u(\cdot),p(\cdot),q(\cdot),P(\cdot)\equiv -1)$ è

$$\mathcal{H}(t,x,u) = G(t,x,u,p(t),P(t)) + u[q(t) - P(t)u(t)] =$$

$$= -\frac{1}{2}u^2 + [1+q(t)+u(t)]\cdot u.$$

Ebbene, se prendiamo $(x(t),u(t)) \equiv (W(t),1)$, allora chiaramente $(p(t),q(t)) = (-W(t),-1)$ $(= (-x(t),-u(t)))$ e quindi la mappa $H(t,\cdot,\cdot,p(t),q(t)) \equiv 0$ è banalmente concava su tutto $\mathbb{R}_x \times [0,1]_u$, mentre

$\mathcal{H}(t,x(t),u) = -\frac{1}{2}u^2 + u$ che prende valor massimo $(=\frac{1}{2})$ in $u=1$

per ogni $t\in[0,1]$) (essendo che $\left(-\frac{1}{2}u^2+u\,s\right)' = -u+1$ ecc.) : in conclusione $(W(t),1)$ è ottimale in virtù del Teorema delle condizioni sufficienti di ottimalità stocastica. □

$\boxed{\text{ES. 4.}}$ Consideriamo il seguente Problema $(D_{s,y})$ con $n=k=1$: assegnati $T\in(0,+\infty)$ e $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}$, minimizzare $J(s,y;u(\cdot)) \equiv x(T)$ al variare delle $u(\cdot)\in L^2(s,T;U)$, dove $U\equiv[-1,1]$, e $x(\cdot)\equiv x(\cdot;u(\cdot))\in L^2(s,T;\mathbb{R})$ tali che

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = u(t)x(t), & t\in[s,T],\\ x(s) = y\end{cases}$$

. Dimostrare che non esistono soluzioni di classe $C^1([0,T]\times\mathbb{R})$ dell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman di tale problema.

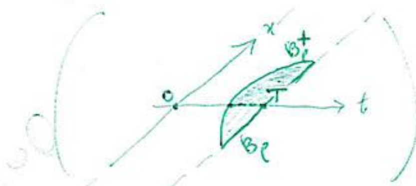
$\boxed{\text{Dim.}}$ Per ogni $u(\cdot)\in L^2(s,T;U)$, è $x(t)\equiv x(t;u(\cdot)) = y\exp\left(\int_s^t u(r)\,dr\right)$ e per ciò $J(s,y;u(\cdot)) \equiv x(T) = y\exp\left(\int_s^T u(r)\,dr\right)$: dunque risulta chiaramente che

$$V(s,y) \equiv \inf_{|u|\le 1} y\exp\left(\int_s^T u(r)\,dr\right) = \begin{cases} y\cdot e^{T-s} & \text{se } y\le 0\\ y\cdot e^{s-T} & \text{se } y\ge 0\end{cases} \quad \text{per ogni } (s,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}.$$

Così $V(\cdot)$ è continua e derivabile su tutto $[0,T]\times\mathbb{R}$, ma $V(\cdot)\notin C^1([0,T]\times\mathbb{R})$ (in quanto $s\mapsto V_y(s,0)$ non è continua in alcun $s\in[0,T)$).

Ora, visto che la hamiltoniana del problema è $H(t,x,u,p) = xup$, risulta $\sup_{|u|\le 1} H(t,x,u,p) = |xp|$ e pertanto l'equazione HJB del problema è

$$\begin{cases} -v_t(t,x) + |x\,v_x(t,x)| = 0, & (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R},\\ v(T,x) = x, & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$



Supponiamo per assurdo che esiste una soluzione $v(\cdot)\in C^1([0,T]\times\mathbb{R})$ di tale equazione. Allora certamente $v_x(T,x)\equiv 1$, $x\in\mathbb{R}$, e per continuità esiste una mappa $\rho(x)\in C(\mathbb{R};[0,T))$ simmetrica rispetto a $x=0$ e non-decrescente in $|x|$ tale che, se denotiamo con $B_\rho \triangleq \{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R} \mid \rho(x)\le t\le T\}$, allora

$\boxed{v_x(t,x)>0 \quad \text{per ogni } (t,x)\in B_\rho}$. Poniamo poi $B_\rho^+ \triangleq B_\rho\cap([0,T]\times\underbrace{\mathbb{R}_+}_{(=(0,+\infty))})$.

Dunque
$$\begin{cases} v_t(t,x) = \begin{cases} x\,v_x(t,x) & \text{per ogni } (t,x)\in B_\rho^+\\ -x\,v_x(t,x) & \text{per ogni } (t,x)\in B_\rho\setminus B_\rho^+\end{cases},\\ v(T,x) = x, \quad x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Concentriamoci su B_ρ^+, e consideriamo il seguente cambio di variabili per $w(\cdot)$ a

B_ρ^+ : $\left\{ \begin{array}{ll} (t,x) \mapsto (\tau, z), & \begin{cases} \tau \doteq t \\ z \doteq x e^{t} \end{cases}, \text{ ossia} \\ (\tau, z) \mapsto (t,x), & \begin{cases} t \doteq \tau \\ x \doteq z e^{-\tau} \end{cases}. \end{array} \right.$

$\left([0,T]\times\hat{\mathbb{R}}_+ \text{ in } x'\right)$

Poniamo quindi $\Phi(\tau, z) \triangleq w(\tau, z e^{-\tau})$: allora, vista la HJB, è

$$\Phi_\tau(\tau, z) = w_t(\tau, z e^{-\tau}) + (-z e^{-\tau})\cdot w_x(\tau, z e^{-\tau}) \equiv 0 ,$$ ovvero

Φ è costante rispetto alla variabile τ. Riscriviamo $\Phi(\tau, z) \equiv \Phi(z)$.

Dunque $w(\tau, z e^{-\tau}) = \Phi(z)$, e cioè $w(t,x) = \Phi(x e^{t})$ per ogni $(t,x) \in B_\rho^+$: di conseguenza, grazie anche al dato al bordo, deduciamo che

$$x e^{-T} = w(T, x e^{-T}) = \Phi(x) ,$$ da cui $\Phi(x) = x e^{-T}$ e quindi

$\boxed{w(t,x) = x e^{t-T}}$ per ogni $(t,x) \in B_\rho^+$. Alla in modo analogo è possibile ottenere che $w(t,x) = x e^{T-t}$ su $B_\rho \setminus B_\rho^+$, ed in conclusione che $w(\cdot) \equiv V(\cdot)$ su tutto B_ρ : assurdo, perché $V(\cdot)\big|_{B_\rho} \notin C^1(B_\rho)$. $\square$]