

Equazioni differenziali rough : una storia e (nuovi) ed un teorema di
esistenza e unicità (deterministico)
 (FRIZ - HAIRER, capitolo 8, paragrafi 8.4 e 8.5 note) (pag. 105) maggio 2017 (pag. 105)
 (MARCO TARSIA, 9/5) (NOTE SINTETICHE)

INTRODUZIONE
 (anni, TE(0,100)) 1/2

SITUAZIONE / FRAMEWORK. $T > 0$, $\lambda \in (0, 1]$, $(V, 1, 1_V)$ e $(W, 1, 1_W)$ Banach
 reali; $\xi \in W$, $A_0 \in \mathcal{G}^0(W, W)$ e $A \in \mathcal{G}^0(W, \mathcal{L}(V, W))$ (non-lineari)
 $\mathcal{L}(W, \mathcal{L}(V, W)) \cong \mathcal{L}(W \times V, W) \xrightarrow{\text{dimens. finita}} \mathcal{L}(V \otimes V, W)$

Sistemi modellati da ϕ e A $\Rightarrow$ determinare, per ogni $t \in [0, T]$,
 il/una segnale di output $Y_t : [0, T] \rightarrow W$ con $Y_0 = \xi$ soddisfacendo
 il sistema stesso al segnale di input $X_t : [0, T] \rightarrow V$, in modo che
 in simboli

$$\begin{cases} dY_t = A_0(Y_t)dt + A(Y_t)dX_t \\ Y_0 = \xi \end{cases}$$

(NEL SENSO :
 il segnale Y_t , che
 per $t=0$ è ξ , si
 evolve in base a
 - se stesso tramite
 ϕ e ϕ , ed a
 nel mentre "guidato"
 dal segnale X_t)

("controlled ODEs") (col orizzonte finito) (e autonome)
 (ES. (Banach finito-dimensionali.) $V = \mathbb{R}^d$ e $W = \mathbb{R}^m$, $d, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\Rightarrow Y_t = \begin{bmatrix} Y_t^1 \\ \vdots \\ Y_t^m \end{bmatrix}, X_t = \begin{bmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^d \end{bmatrix}, A_0(x_1, \dots, x_m) = \begin{bmatrix} \phi^1(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ \phi^m(x_1, \dots, x_m) \end{bmatrix},$$

$$A(x_1, \dots, x_m) = \begin{bmatrix} A^{1,1}(x_1, \dots, x_m) & \dots & A^{1,d}(x_1, \dots, x_m) \\ \vdots & & \vdots \\ A^{m,1}(x_1, \dots, x_m) & \dots & A^{m,d}(x_1, \dots, x_m) \end{bmatrix}$$

! Ci stiamo occupando solo della costruzione della teoria definizionale delle mappe-soluzioni
 $S : X \doteq (X_t)_{t \in [0, T]} \mapsto Y \doteq (Y_t)_{t \in [0, T]}$. Rimandiamo al
 seguito il problema delle unicità / continuità di S ($\rightarrow$ "stabilità")

[mappe di Itô, teoremi di Lyons, mappe di Itô-Lyons]
 ($\rightarrow$ la "patata" di Friz-Hairer)

[Regolarità (analitica) di X e di Y] : $\begin{cases} X \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], V) \text{ e} \\ Y \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], W) \end{cases}$

(! $\alpha \leq \frac{1}{2}$!) ($\rightarrow$ non-smooth) (e nemmeno Young)

IDEA (per le X) : che X sia "sufficientemente regolare" ed un tracce forte
 (quindi, i deboli teoremi dopo!)

$X := (X, \mathbb{X}) \in \mathcal{G}^x([0, T], V)$, considero la mappa integrale (le componenti di) X contro (le componenti di) X stesso, e cerco quindi "Y simile a X" $\rightsquigarrow$ Y una funzione regolare di X , o più in generale "Y controllato da X (nel senso di Gyöngy)". [$\Rightarrow$ IDEA per i coefficienti A e σ]: che sono molto più che continui, decidono in un qualche $\mathcal{G}_b^x$ (cioè densabili almeno in $\mathcal{H}$ sotto nel senso di Fréchet, con derivate continue e limitate).

[In effetti, il/una segnale di output $Y = (Y_t)_{t \in [0, T]}$ dovrebbe dovrebbe possedere "small-scale fluctuations" della forma ("dimensioni locali")

$$\underbrace{Y_{n,t}}_{\substack{\text{ii} \\ (Y_t - Y_0) \\ \text{"path increment"}}} = \underbrace{A(Y_n)}_{\text{ii}} \underbrace{X_{n,t}}_{\substack{\text{ii} \\ (X_t - X_0) \\ \text{"path increment"}}} + \underbrace{R_{n,t}}_{\substack{\text{un resto di ordine "basso"} \\ \nearrow \Delta}}, \text{ dove } 0 \leq n \leq t \leq T \text{ e dove } \dots$$

Dunque, effetto, se raffino "fine" $\int_0^t X_{n,s} dX_n^i = \int_0^t (X_n^i - X_0^i) dX_n^i$, e se $\int Y$ è "piccolo" e X , allora anche $\int f(Y)$ è "piccolo" e X e possiamo fare $\int_0^t f(Y_n) dX_n$.] (Vedi richiami successivi...)

Per ciò, interpretiamo la/una soluzione Y delle SODE

$$\begin{cases} dY = f_0(Y)dt + f(Y)dX_t \\ Y_0 = \xi \end{cases}, \text{ anzi delle } \underline{\text{SODE}} \underline{\text{rough}}$$

$$\begin{cases} dY = f_0(Y)dt + f(Y)d\mathbb{X}_t \\ Y_0 = \xi \end{cases} \quad \left(\text{considerando come essenziale le reti di } X \mapsto \mathbb{X} = (X, \mathbb{X}) \text{ rough (path)} \right),$$

Come la/una soluzione Y dell'equazione integrale rough

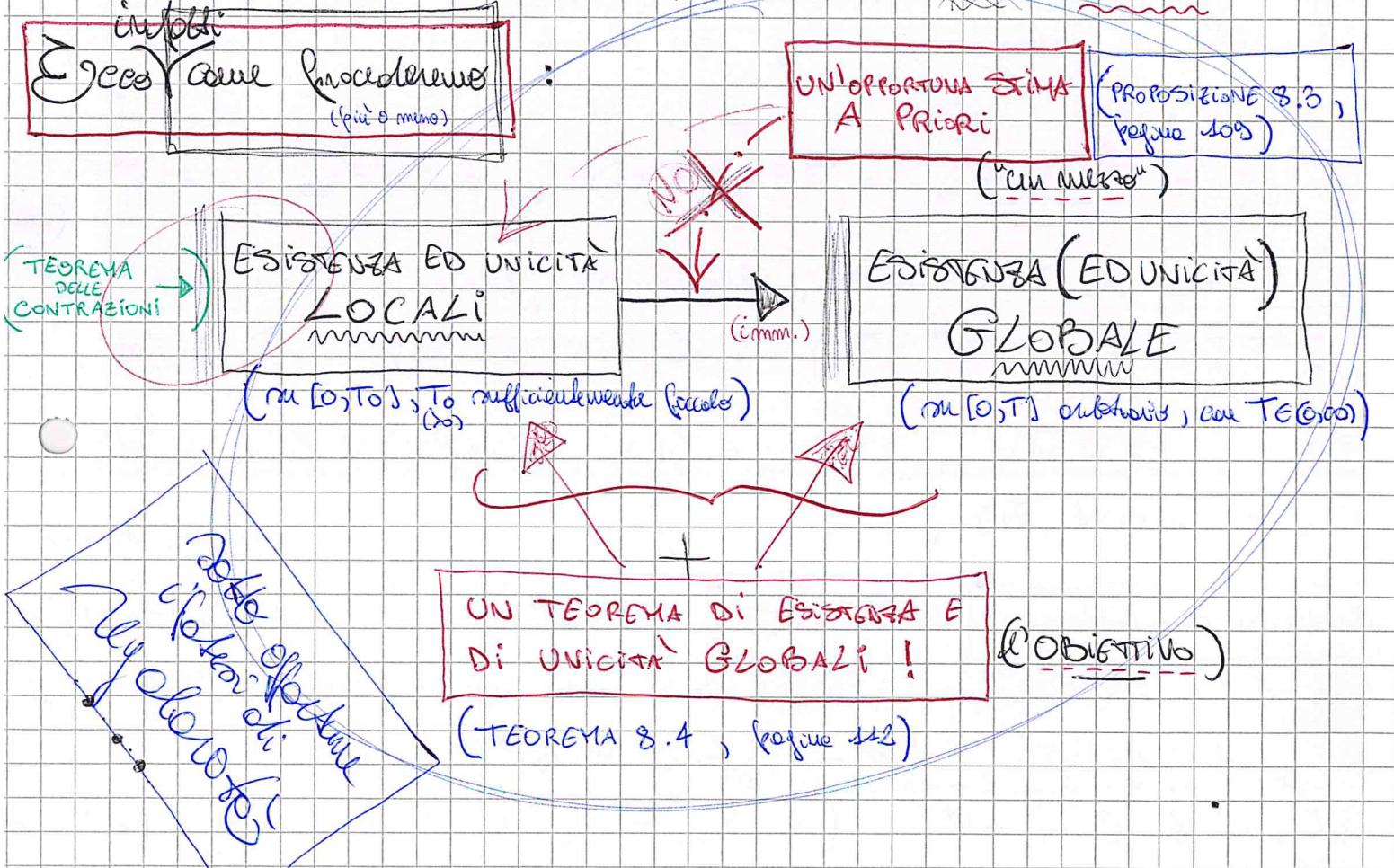
$$Y_t = \xi + \underbrace{\int_0^t f_0(Y_n) dt}_{\text{(Riemann-Stieltjes)}} + \underbrace{\int_0^t f(Y_n) d\mathbb{X}_n}_{\text{(int. rough di Gyöngy)}}$$

[Le forme differenziali del problema è ora una notazione!]

2) Dato quasi ovunque, più precisamente, $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$. (Per poterci appoggiare sulle "Lyons' rough path analysis" che conosciamo).

NOTA: Dunque, per una data $X_t \in \tilde{C}^\alpha([0, T], V)$ (dove α è la regolarità di X), ci vorrebbe un sollevamento rough path $\tilde{X} = (X, \mathbb{X}) \in \tilde{C}^\alpha([0, T], V)$, dove $\mathbb{X}$ è il secondo ordine. Sappiamo anche $\alpha \neq \frac{1}{2}$, e non che $\dim V < \infty$. [Teorema di Lyons-Victor.]

Ma anche, anche T non può essere arbitrario, in generale, in quanto potrebbe benissimo accadere questo: che esista sì una path-soluzione Y di $dY = A(Y)dt + B(Y)d\tilde{X}_t$ con $Y_0 = \xi$, ma che $Y_t = \xi + \int_0^t A(Y_s)ds + \int_0^t B(Y_s)d\tilde{X}_s$, e magari anche unico, però solo su un intervallo $[0, T_0]$ con $0 < T_0 \ll 1$, e non su un intervallo $[0, T]$ di T fisso ma anche arbitrariamente grande. Dato brevemente, la/una soluzione potrebbe essere solo locale.



Al fatto però preesistentemente questione di effettive stime in norma, o meglio in semi-norma. Ci vorranno adattamenti concreti e quelle teorie rough, fin o meno classiche, che ci permetteranno di raggiungere tale obiettivo.

RIFERIMENTI (FRIZ = HAIRER). Questo introduce: CAPITOLO 1, PAR. 1.1 (il finale) e "qualcosa" dei CAPITOLI 2, 4 e 8. Richiami che servono: CAPITOLO 1, PAR. 1.4 e 1.5 (gli ultimi due), e CAPITOLI 2, 4^{1a} par., 4, 3^a par., 7, 3^a par. (Più o meno). (-> Insieme, i capitoli 1, 2, 4 e 7.)

PRELIMINARI

(continuando l'introduzione)

PRODOTTO TENSORIALE (che non serve). Ricordiamo che l'isomorfismo (lineare) fondamentale $\mathcal{L}(U, \mathcal{L}(V, W)) \cong \mathcal{L}(U \otimes V, W)$. $\lim_{\leftarrow} \mathcal{L}(U, \mathcal{L}(V, W)) \cong \mathcal{L}(U \otimes V, W)$. $\lim_{\leftarrow} \mathcal{L}(U, \mathcal{L}(V, W)) \cong \mathcal{L}(U \otimes V, W)$. (E che, se $(U, 1_U)$ e $(V, 1_V)$ sono Banach, allora anche $(U \otimes V, 1_{U \otimes V})$ è Banach e un'operazione 1^a da).

[In particolare, ad esempio, $\mathcal{L}(U, \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(W, \bar{W}))) \hookrightarrow \mathcal{L}(U \otimes V, \mathcal{L}(W, \bar{W}))$. ($\cong$)

DERIVATE DI FRÉCHET (che non servono). Ricordiamo che, dati $K \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $W, \bar{W}$ Banach reali, $F \in \mathcal{C}_b^K(W, \bar{W})$ se e solo se $F: W \rightarrow \bar{W}$ Fréchet-derivabile K volte (pulsante) con derivate continue e lineari (rispetto ai relativi domini e codomini), ed in tal caso F ha norma $\mathcal{G}_b^K$ (per def.).

$$\|F\|_{\mathcal{G}_b^K} = \sum_{h=0}^K \|D^h F\|_0 = \|F\|_0 + \|DF\|_0 + \|D^2 F\|_0 + \dots + \|D^K F\|_0.$$
 ($< \infty$)

NOTA Dato che $F: W \rightarrow \bar{W}$, abbiamo che, $\forall w \in W$, e $\forall h=1, \dots, K$,
 $D^h F(w) \in \mathcal{L}(W^{\otimes h}, \bar{W}) \hookrightarrow \mathcal{L}(W \otimes \dots \otimes W, \bar{W})$. In pratica,
 $DF(w) \in \mathcal{L}(W, \bar{W})$, $D^2 F(w) \in \mathcal{L}(W, \mathcal{L}(W, \bar{W})) \cong \mathcal{L}(W \times W, \bar{W})$
 $\hookrightarrow \mathcal{L}(W \otimes W, \bar{W})$, ecc.

CAMMINI α -HÖLDER: Lo spazio $\mathcal{C}^\alpha$. Ricordiamo che " $X \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$ " se (per def.) $X = (X_t)_{t \in [0, T]}: [0, T] \rightarrow V$ e' tale per cui $\exists C \in (0, \infty)$ tale che, $\forall s, t \in [0, T]$, $|X_t - X_s|_V \leq C |t - s|^\alpha$, e cioè

$|X_{s,t}| \leq C |t - s|^\alpha$ (se $X_{s,t} \stackrel{\text{def.}}{=} X_t - X_s$ e' il path increment), ed in tal caso la costante C ottenibile e' la semi-norma di X

$[X]_\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{0 \leq s < t \leq T} \frac{|X_{s,t}|_V}{|t - s|^\alpha}$ ($< \infty$). Invece,
 $\|X\|_\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} |X_0|_V + [X]_\alpha$ e' la norma $\mathcal{G}^\alpha$ di X . (e $(\mathcal{G}^\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ e' di Banach)

3) FUNZIONI SU $[0,T]^2$ α -HÖLDER-DIAGONALI: Lo spazio $\tilde{G}_2^\alpha$. Dati $(U, |\cdot|)$ (2-CAVALIERI)

Benach (reale) e dato una funzione in U di due parametri in $[0,T]$
 $\Xi: [0,T]^2 \rightarrow U$ continue, inoltriamo, per ogni $(s,t) \in [0,T]^2$,

(6.6i) $\Xi_{s,t} := \Xi(s,t)$ (NON è un incremento, in generale!) . Allora " $\Xi \in \tilde{G}_2^\alpha$ "

α e solo se, per definizione, $\exists C \in (0, \infty)$ tale che, $\forall (s,t) \in [0,T]^2$,
 $|\Xi_{s,t}| \leq C |t-s|^\alpha$, ed in tal caso le costanti C ottenute
 e le denotiamo $\tilde{G}_2^\alpha$ che Ξ

$[\Xi]_\alpha \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{s \neq t \in [0,T]} \frac{|\Xi_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}$. (NOTA Per $\alpha \geq 1$, mentre ogni elemento di $\tilde{G}_2^\alpha$ è un path costante, le maggior

parte degli elementi di $\tilde{G}_2^\alpha$ restano non-bandi, chiaramente, e questo
 ci piace molto se pensiamo $\alpha \geq 1$ e se Ξ è un temine di errore.

Infatti, comunque prendiamo $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $0 =: t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N =: T$,
 se indichiamo $\pi_N = \{[t_{i-1}, t_i] \mid i=1, \dots, N\}$ ($\Rightarrow \# \pi_N = N$) e $|\pi_N| \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{k=1, \dots, N} (t_k - t_{k-1})$
 ($= \max_{k=1, \dots, N} (t_k - t_{k-1})$), e se vogliamo mostrare " $|\pi_N| \rightarrow 0$ " (per $N \rightarrow \infty$),
 allora vediamo che

$$\begin{aligned} \sum_{(s,t) \in \pi_N} |\Xi_{s,t}| &\leq C \cdot \sum_{(s,t) \in \pi_N} |t-s|^\alpha \stackrel{(\text{ovvio})}{=} C \cdot \sum_{(s,t) \in \pi_N} |t-s|^{\alpha-1} \cdot |t-s| \leq \left(|t-s| \leq |\pi_N| \text{ e } \alpha-1 > 0 \right) \\ &\stackrel{(|\Xi_{s,t}| \leq C |t-s|^\alpha)}{\leq} C \cdot |\pi_N|^{\alpha-1} \sum_{(s,t) \in \pi_N} (t-s) = C \cdot T |\pi_N|^{\alpha-1} \stackrel{|\pi_N| \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 \quad (\alpha > 1!) \end{aligned}$$

(NOTAZIONE CONOSCIUTA!)

NOTAZIONI. Dato $X \in \tilde{G}_2^\alpha([0,T], V)$, e dato quindi $I \subseteq [0,T]$ intervallo (non vuoto), poniamo

$[X]_{\alpha; I} \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{s < t \in I} \frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}$ come le denotiamo $\tilde{G}_2^\alpha$

del path ristretto $X|_I: I \rightarrow V$. (Ma affetti, $[X]_{\alpha; I} \leq [X]_\alpha$, e
 $[X]_{\alpha; [0,T]} = [X]_\alpha$.) Dunque, per ogni $h \in [0,T]$, poniamo

$[X]_{\alpha; h} \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\substack{I \subseteq [0,T] \text{ intervallo} \\ 0 \leq \text{diam}(I) \leq h}} [X]_{\alpha; I}$, ed in particolare otteniamo che

$[X]_\alpha \geq [X]_{\alpha; h} (\geq [X]_{\alpha; I} \quad \forall I \leq h)$, e $[X]_{\alpha; T} = [X]_\alpha$.

Analogamente, dato $\Xi \in \tilde{G}_2^\alpha([0, T], U)$ e dato $I \subseteq [0, T]$ intervallo (non $\emptyset$) possiamo $[\Xi]_{\alpha; I} \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\substack{s \neq t \text{ in } I}} \frac{|\Xi_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} \quad (= [\Xi]_{\alpha; I^2})$, per cui $[\Xi]_{\alpha; I} \leq [\Xi]_{\alpha}$ e $[\Xi]_{\alpha; [0, T]} = [\Xi]_{\alpha}$. Dato infine $h \in (0, T]$, possiamo $[\Xi]_{\alpha; h} \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\substack{I \subseteq [0, T] \text{ intervallo,} \\ 0 < \text{length}(I) \leq h}} [\Xi]_{\alpha; I}$, per cui $[\Xi]_{\alpha; T} = [\Xi]_{\alpha} \geq [\Xi]_{\alpha; h} \geq [\Xi]_{\alpha; I} \dots$

(UN PAIO DI)
OSSERVAZIONI.
(elementari)

[1] Se $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, allora $\tilde{G}^\beta \hookrightarrow \tilde{G}^\alpha$ e $\tilde{G}_2^\beta \hookrightarrow \tilde{G}_2^\alpha$. (su $[0, T]$)

Precisamente, infatti, vale per "entrambi" gli spazi che $[\cdot]_{\alpha; T} \leq T^{\beta-\alpha} [\cdot]_{\beta; T}$.

[2] Sia $X_t: [0, T] \rightarrow V$ tale per cui $\exists C \in (0, \infty)$ tale che, $\forall 0 \leq s < t \leq T$, valga $|X_{s,t}| \leq C|t-s|^\beta$ allora, $\forall 0 \leq s < t \leq T$, $|X_{s,t}| \stackrel{(\text{im.})}{\leq} C|t-s|^{\beta-\alpha} |t-s|^\alpha \leq C T^{\beta-\alpha} |t-s|^\alpha$, per cui $[X]_{\alpha; T} \leq C T^{\beta-\alpha}$; basta ora prendere $C = [X]_{\beta; T}$. $\checkmark$

[3] Il tutto analogo per $\Xi_{s,t} \in \tilde{G}_2^\beta$: $\Xi_{s,t} \leq C|t-s|^\beta = C|t-s|^{\beta-\alpha} |t-s|^\alpha \leq C T^{\beta-\alpha} |t-s|^\alpha$. $\checkmark$

[4] Duchi che dato $\alpha \in (0, 1]$, $h \in (0, T]$ e $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, vale che, per ogni $X \in \tilde{G}^\alpha([0, T], V)$, $[X]_{\alpha; h} \leq m [X]_{\alpha; \frac{h}{m}}$.

[5] Al caso $m=2$ si riconduce del tutto il caso generale, per cui dimostriamo che, per ogni $0 \leq s < t \leq T$ con $t-s \leq h$, vale $|X_{s,t}| \leq 2 [X]_{\alpha; \frac{h}{2}} \cdot (t-s)^\alpha$. Sia per questo $s_1 := \frac{s+t}{2}$ ($= s + \frac{t-s}{2} = t - \frac{t-s}{2}$), quindi $|X_{s,t}| \stackrel{(\text{im.})}{\leq} |X_{s,s_1}| + |X_{s_1,t}| \leq [X]_{\alpha; \frac{h}{2}} ((t-s_1)^\alpha + (s_1-s)^\alpha) \stackrel{(\text{im.})}{\leq} 2 [X]_{\alpha; \frac{h}{2}} \left(\frac{t-s}{2}\right)^\alpha \leq 2 [X]_{\alpha; \frac{h}{2}} (t-s)^\alpha$ ($\frac{t-s}{2} \leq \frac{h}{2}$) (perché $2^{-\alpha} \leq 1$ per $\alpha \geq 0$). $\checkmark$

UN ESERCIZIO. (Esercizio 4.24 del libro, pagina 65.) Siano $\alpha \in (0, 1]$, $T > 0$, $h \in (0, T]$ e $X: [0, T] \rightarrow V$ tali che esiste $M \in (0, \infty)$ tale per cui risulti

$$[X]_{\alpha; h} \stackrel{(\text{def.})}{=} \sup_{\substack{0 \leq s < t \leq T, \\ t-s \leq h}} \frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} \leq M. \quad \text{Allora } X \in \tilde{G}^\alpha([0, T], V) \text{ e (cioè } I_1^\alpha \text{ e } [0, T] \text{!)} \quad \left(\text{nel libro manca!} \right)$$

$$\text{che } [X]_{\alpha} \leq M \left(1 \vee 2 \left(\frac{T}{h} \right)^{1-\alpha} \right) = M \left(1 \vee 2 T^{1-\alpha} h^{-(1-\alpha)} \right). \quad \left(\leftarrow \forall a, b \in \mathbb{R} \atop a \vee b = \max\{a, b\} \right)$$

(NOTA: $0 \leq 1-\alpha < 1$.)

[6] Saperlo che, $\forall 0 \leq s < t \leq T$ con $t-s \leq h$, vale $|X_{s,t}| \leq M|t-s|^\alpha$, vogliamo dimostrare che, $\forall 0 \leq s < t \leq T$, $|X_{s,t}| \leq \max\{M, 2MT^{1-\alpha}h^{-(1-\alpha)}\} \cdot |t-s|^\alpha$, e cioè chiaramente

GAMMINI α -HÖLDER CONTROLLATI: Lo spazio $\mathcal{D}_X^{2\alpha}$. Dato $(\bar{W}, |\cdot|)$ Banach (reale),
(se $\bar{W}$ è $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $\bar{W} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

dato $X \in \tilde{G}^\alpha([0, T], V)$ dove $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, una coppia $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], \bar{W})$ se,
 e solo se, $Y \in \tilde{G}^\alpha([0, T], \bar{W})$ mentre $Y' \in \tilde{G}^\alpha([0, T], \mathcal{L}(V, \bar{W}))$ e' tale che risulta
(per definizione)

$$Y_{n,t} - Y'_n X_{n,t} = \mathcal{O}(|t-s|^{2\alpha}) \quad , \quad n, t \in [0, T]. \quad \text{In altri termini, definito}$$

("O grande")

$$R^Y_{n,t} : [0, T]^2 \rightarrow \bar{W} \quad \text{come} \quad R^Y_{n,t} \stackrel{\text{def.}}{=} Y_{n,t} - Y'_n X_{n,t} \quad , \quad (n, t) \in [0, T]^2, \quad \text{risultato (per def.)}$$

(che sta in $\tilde{G}_2^{2\alpha}$)
($R^Y \equiv R^{(Y, Y')}$)

$$[R^Y]_{2\alpha} \stackrel{\text{(def.)}}{=} \sup_{n \neq t \in [0, T]} \frac{|R^Y_{n,t}|}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty. \quad \text{In tal caso, } Y \text{ ammette una derivata}$$

"al secondo ordine"

$$Y_{n,t} = Y'_n X_{n,t} + R^Y_{n,t} \quad , \quad \text{e } Y' \text{ e' "UNA DERIVATA DI GUBINELLI DI } Y$$

(RISPETTO A X)" (un modo di "evitare la noia")

(differenziale Gubinelli)

NOTA. (Non-unicità delle derivate di Gubinelli: X, Y "regolari".) Se $X \in \tilde{G}^{2\alpha}([0, T], V)$ e
 "anche" $Y \in \tilde{G}^{2\alpha}([0, T], \bar{W})$, allora ogni $Y' \in \tilde{G}^\alpha([0, T], \mathcal{L}(V, \bar{W}))$ e' una derivata di
 $g.$ di Y (rispetto a X), essendo in particolare che $Y' \in \tilde{G}^\alpha$ e' continuo.]

Esempio. (Lemma 4.1, pagine 45.) Dato $X \in \tilde{G}^\alpha([0, T], V)$ dove $\alpha \leq \frac{1}{2}$, e dato una funzione
 $F \in \tilde{G}_b^2(V, \mathcal{L}(V, W))$, definiamo $Y_t \equiv F(X_t)$ e $Y'_t \equiv DF(X_t)$ per ogni
 $t \in [0, T]$, cosicché $Y \equiv (Y_t)_{t \in [0, T]} \in \tilde{G}^\alpha([0, T], \mathcal{L}(V, W))$ mentre $Y' \equiv (Y'_t)_{t \in [0, T]}$
 $\in \tilde{G}^\alpha([0, T], \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, W)))$. [Grazie a $[Y]_{2\alpha} \leq \|DF\|_\infty [X]_{2\alpha}$ e $[Y']_{2\alpha} \leq \|D^2F\|_\infty [X]_{2\alpha}$.]
 Abbiamo, in realtà $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], \mathcal{L}(V, W))$. [Grazie a $[R^Y]_{2\alpha} \leq \frac{1}{2} \|D^2F\|_\infty [X]_{2\alpha}^2$.]
 (Brevemente: se $F \in \tilde{G}_b^2$, allora $(FX, DF(X)) \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}$.)

Grazie in particolare alla linearità degli spazi $\tilde{G}^\alpha$ e $\tilde{G}_2^{2\alpha}$, riconosciamo subito che pure
 lo spazio $\mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], \bar{W})$ e' lineare. Precisamente, dato $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}$, vale che
(coefficiente)
 per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda Y, \lambda Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}$ con $R^{\lambda Y} = \lambda R^Y$, e vale che, per ogni altro
 $(\tilde{Y}, \tilde{Y}') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}$, $(Y + \tilde{Y}, Y' + \tilde{Y}') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}$ con $R^{Y+\tilde{Y}} = R^Y + R^{\tilde{Y}}$. In particolare,
 $(\lambda Y)' = \lambda Y'$ e $(Y + \tilde{Y})' = Y' + \tilde{Y}'$ (come formali scelte delle rispettive
 derivate di Gubinelli rispetto a X).

APPLICAZIONE (BANALOTTA). Quale che sia $\xi \in \bar{W}$, il path costante $\equiv \xi$
(inutile)
 ammette derivate di $g.$ $\equiv 0_{\mathcal{L}(V, \bar{W})}$ e resto relativo $R^\xi \equiv 0_{\bar{W}}$: brevemente,
 $(\xi, 0) \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}$ con $R^\xi \equiv 0$. Dunque, dato $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}$, vale che

5) $(Y+\xi, Y') \in \mathcal{D}_X^{2d}$ con $R^{Y+\xi} = R^Y$; in particolare, $(Y+\xi)' = Y'$.

Per $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2d}([0, T], \bar{W})$, è definita la seminorma $\mathcal{D}_X^{2d}$ di (Y, Y')
 $[Y, Y']_{X, 2d} \stackrel{\text{def.}}{=} [Y']_\alpha + [R^Y]_{2d}$, e quindi la norma $\mathcal{D}_X^{2d}$ di (Y, Y')
 $\|(Y, Y')\|_{X, 2d} \stackrel{\text{def.}}{=} |Y_0| + |Y'_0| + [Y, Y']_{X, 2d}$. (È possibile dimostrare che

$(\mathcal{D}_X^{2d}([0, T], \bar{W}), \|\cdot\|_{X, 2d})$ è uno spazio di Banach.)

NOTA Dato $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2d}$ e dato $\xi \in \bar{W}$, vale $[Y+\xi, Y']_{X, 2d} = [Y, Y']_{X, 2d}$.

UNA STIMA. (Pag. 56) Esiste una costante $C_{\alpha, T} \in (0, \infty)$ (dipendente solo da α e T) - tale che, per ogni $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2d}([0, T], \bar{W})$, valga la "della stima"

$$[Y]_\alpha \leq [R^Y]_\alpha + \|Y'\|_\infty [X]_\alpha \leq C_{\alpha, T} (1 + [X]_\alpha) (|Y'_0| + [Y, Y']_{X, 2d}).$$

Dimostrare, nel caso che sia $T \leq 1$, $C_{\alpha, T}$ può essere scelta uniformemente nelle T ; dunque, " $C_{\alpha, T} = C_\alpha$ ".

TEOREMA DI GUBINELLI. (Teorema 4.10, pag. 57) Sia $T > 0$, $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $(V, |\cdot|)$ e $(W, |\cdot|)$ Banach (reali), e siano $X = (X, X') \in \mathcal{G}^\alpha([0, T], V)$ e $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2d}([0, T], \mathcal{L}(V, W))$, con $R_{n,t}^Y \stackrel{\text{def.}}{=} Y_{n,t} - Y'_n X_{n,t}$, $(n, t) \in [0, T]^2$.

Allora, per ogni $0 \leq s \leq t \leq T$ e per ogni partizione π_N di $[s, t]$, esiste ed è indipendente da π_N stesso il limite (in W)

$$\int_s^t Y_{\pi} dX_{\pi} \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{|\pi_N| \rightarrow 0} \sum_{[u,v] \in \pi_N} (Y_u X_{u,v} + Y'_u X_{u,v})$$
, che chiamiamo

"L'INTEGRALE SU $[s, t]$ DI Y CONTRO X ". Dimostrare, valgono le due seguenti stime: (di GUBINELLI)

1) esiste una costante $C_{\alpha, T} \in (0, \infty)$ tale che, per ogni $0 \leq s \leq t \leq T$, risulti

$$\left| \int_s^t Y_{\pi} dX_{\pi} - Y_s X_{s,t} - Y'_s X_{s,t} \right|_W \leq C_{\alpha, T} ([X]_\alpha [R^Y]_{2d} + [X]_{2d} [Y']_\alpha) |t-s|^{3\alpha}$$

ed inoltre, nel caso $T \leq 1$, possiamo scegliere $C_{\alpha, T} = C_\alpha$;

2) è $(\int_0^\cdot Y dX, Y_\cdot) \in \mathcal{D}_X^{2d}([0, T], W)$ (per cui $(\int_0^\cdot Y dX)' = Y_\cdot$), e che

$$[\int_0^\cdot Y dX, Y_\cdot]_{X, 2d} \leq [Y]_\alpha + \|Y'\|_\infty [X]_{2d} + C_{\alpha, T} ([X]_\alpha [R^Y]_{2d} + [X]_{2d} [Y']_\alpha).$$

(Ed inoltre, se $T \leq 1$, allora $C_{\alpha, T} = C_\alpha$.)

Oss. (imm.) Dalle [1] segue subito che $\left| \int_0^T Y_{s,\pi} dX_{s,\pi} \right| \leq \|Y'\|_{\infty} \|X\|_{\infty}^* + \mathcal{O}_{\substack{\text{a.r.} \\ \text{a.r.}}} (1-t-s)^{3\alpha}$.

Donc, dalla [2] segue che la mappa $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], \mathcal{L}(V, W)) \mapsto (\int_0^\cdot Y dX, Y) \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], W)$ è $\|\cdot\|_{X, 2\alpha}$ -continua (oltre che lineare).

LEMMA 7.3. (Lemma 7.3, pag. 97.) Siano $T > 0$, $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $(V, |\cdot|)$, $(W, |\cdot|)$ e $(\bar{W}, |\cdot|)$ Banach (reali), e siano $X \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$ e $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], W)$. Allora, quale che sia $A \in \mathcal{G}_b^{2\alpha}(W, \bar{W})$ ($\Rightarrow \forall w \in W, D_A(w) \in \mathcal{L}(W, \bar{W})$), se poniamo, per ogni $t \in [0, T]$, $A(Y)_t \stackrel{\text{def.}}{=} A(Y_t)$ e $A(Y)'_t \stackrel{\text{def.}}{=} D_A(Y_t) \cdot Y'_t$, allora vale che

$(A(Y), A(Y)') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], \bar{W})$. In effetti, più precisamente, esiste una costante $C_{\alpha, T} \in (0, \infty)$ tale che, se vale $|Y_0| + [(Y, Y')]_{X, 2\alpha} \leq M$ per una certa costante $M \in [1, \infty)$, allora vale anche

$$[(A(Y), A(Y)')]_{X, 2\alpha} \leq C_{\alpha, T} \cdot M \cdot \|A\|_{\mathcal{G}_b^{2\alpha}} \cdot (1 + \|X\|_\alpha) \cdot (|Y_0| + [(Y, Y')]_{X, 2\alpha}).$$

(Sottinteso, se $T \leq 1$, allora $C_{\alpha, T} = C_\alpha$.)

COROLLARIO 7.4 ("regola di Leibniz"). (Pag. 98.) Se in più $(Z, Z') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], \mathcal{L}(W, \bar{W}))$ (per cui $Z_t \in \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(W, \bar{W})) \hookrightarrow \mathcal{L}(V \otimes W, \bar{W})$), e se poniamo, per ogni $t \in [0, T]$,

$$U_t := Z_t Y_t \quad \text{e} \quad U'_t := Z_t Y'_t + Z'_t Y_t \quad (\text{dove, } \forall w \in V, (Z_t Y_t)(w) \stackrel{\sim}{=} Z_t(w \otimes Y_t)),$$

($\Rightarrow U: [0, T] \rightarrow \bar{W}$) ($\Rightarrow U': [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V, \bar{W})$)

allora vale che $(U, U') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], \bar{W})$. (immediato: $\mathcal{D}_X^{2\alpha}$ è un'algebra.)

Esercizio. (elementare) Nel riferimento al Lemma 7.3 e al Corollario 7.4 appena richiamati, e nelle precedenti notazioni, verificare che per $(ZY, (ZY)') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], \bar{W})$ val

$$[(ZY, (ZY)')]_{X, 2\alpha} \stackrel{(\text{def.})}{\leq} \| (Z, Z') \|_{X, 2\alpha} \cdot \| (Y, Y') \|_{X, 2\alpha} \stackrel{(\text{def.})}{=} (|Z_0| + |Z'_0| + [(Z, Z')]_{X, 2\alpha}) (|Y_0| + |Y'_0| + [(Y, Y')]_{X, 2\alpha}).$$

($C_{\alpha, T, X} = C_\alpha, X$ se $T \leq 1$)

[.....]

Un'immediata conseguenza (del Teorema di Gubinelli e del Lemma 7.3): siano $T > 0$, $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $(V, |\cdot|)$ e $(W, |\cdot|)$ Banach (reali), e siano $X = (X, X') \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], V)$, $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], W)$ e $A \in \mathcal{G}_b^{2\alpha}(W, \mathcal{L}(V, W))$. Allora vale che $(A(Y), A(Y)') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], \mathcal{L}(V, W))$, dove di nuovo $A(Y)' = D_A(Y) \cdot Y'$, con una stima $[(A(Y), A(Y)')]_{X, 2\alpha} \leq \dots$ data dal Lemma 7.3, e quindi

6) è ben definito l'integrale di Gubinelli $\int_0^t f(X_s) d\mathbb{X}_s$ su tutti di $f(Y)$ contro $\mathbb{X}$ (per ogni $0 \leq s \leq t \leq T$), e valgono le due stime seguenti come nel Teorema di Gubinelli (sostituendo Y con $f(Y)$). (In particolare, forniamo $(\int_0^t f(Y) d\mathbb{X})' = f(Y)$.)

ESERCIZI. 0) Dati $T > 0$, $\alpha \in (0, 1]$, $(V, |\cdot|)$ Banach (reale) e $X \in \dot{G}^\alpha([0, T], V)$, vale $\|X\|_\alpha \leq |X_0| + [X]_\alpha \cdot T^\alpha$. [Dimmi: $|X_t| \leq |X_0| + |X_{0,t}|$, e $|X_{0,t}| \leq [X]_\alpha t^\alpha$.]

1) Dati $T > 0$, $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $(V, |\cdot|)$ e $(W, |\cdot|)$ Banach (reali), e $X \in \dot{G}^\alpha([0, T], V)$, vale che, per ogni $\frac{1}{3} < \alpha < \beta \leq \frac{1}{2}$ e $X \in \dot{G}^\beta([0, T], V)$, $\mathcal{D}_X^{2\beta}([0, T], W) \subset \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], W)$ e che $\dot{G}^\beta([0, T], V) \subset \dot{G}^\alpha([0, T], V)$, con $\|\cdot\|_\alpha \leq T^{\beta-\alpha} \|\cdot\|_\beta$. [Dimmi, perché? $\alpha < \beta \Rightarrow \dot{G}^\beta \subset \dot{G}^\alpha$ con $[\cdot]_\alpha \leq T^{\beta-\alpha} [\cdot]_\beta$ e $\dot{G}_2^{2\beta} \subset \dot{G}_2^{2\alpha}$ con $[\cdot]_{2\alpha} \leq T^{2(\beta-\alpha)} [\cdot]_{2\beta}$.]

2) (LEMMA). (Tipo Lemma 3.2, pag. 108/109.) Dati $T > 0$, $\alpha \in (0, 1]$, $(V, |\cdot|)$ e $(W, |\cdot|)$ Banach (reali), e dati $Y, \tilde{Y} \in \dot{G}^\alpha([0, T], W)$ e $A \in \dot{G}^{\frac{3}{2}}(W, \mathcal{L}(V, W))$, esiste $g \in \dot{G}_b^{2\alpha}(W \times W, \mathcal{L}(W, \mathcal{L}(V, W)))$ con $\|g\|_b^{2\alpha} \leq C_{\alpha, T} \|A\|_b^{\frac{3}{2}}$ (dove $C_{\alpha, T} = C_\alpha$ nel caso $T \leq 1$) tale per cui risulta (per ogni $t \in [0, T]$) $A(Y_t) - A(\tilde{Y}_t) = g(Y_t, \tilde{Y}_t) \cdot (Y_t - \tilde{Y}_t)$. (Non c'è bisogno che Y e $\tilde{Y}$ siano di compattazione.)

[Sole delle dimostrazione: $\forall \eta, \tilde{\eta} \in W$, $g(\eta, \tilde{\eta}) \doteq \int_0^1 Dg((1-t)\eta + t\tilde{\eta}) dt$.]

I DUE TEOREMI

(ANZI $T \in [0, 1]$, naturalmente) ↗ "risoluzioni"
↘ "abbacchiamenti"

Come nell'introduzione, siano $T > 0$, $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $(V, |\cdot|)$ e $(W, |\cdot|)$ Banach (reali), e siano $\xi \in W$, $A_0 : W \rightarrow W$ e $A : W \rightarrow \mathcal{L}(V, W)$ "regolari" con per lo meno A in $\dot{G}_b^{2\alpha}$. Il problema è il seguente: dato pure $\mathbb{X} = (X, \mathbb{X}) \in \dot{G}^\alpha([0, T], V)$, trovare un $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], W)$ tale che, per ogni $t \in [0, T]$, sia $Y_t = \xi + \int_0^t A_0(Y_s) ds + \int_0^t A(Y_s) d\mathbb{X}_s$, o cioè, in notazione differenziale $dY_t = A_0(Y_t) dt + A(Y_t) d\mathbb{X}_t$ su $[0, T]$. $Y_0 = \xi$.

La difficoltà essenziale di tale problema è (perché) le stime che si ottengono alle basi di fatto le "rough path analysis" studiate fin ora nel caso: consiste nel trovare il modo opportuno di gestire i due processi del

second'ordine X , solitamente più o meno scelto di X , e R^Y , resto strettamente legato anche alle derivate di g . Y' , più o meno scelta. Su particolare, non stupisce affatto, in questo caso, soffono i coefficienti f_0 e A del problema di un ordine più regolare del caso Young $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$. Per il resto, le principali idee dietro ai due risultati che dimostreremo sono praticamente identiche e quelle che hanno ispirato gli analoghi risultati del caso Young stesso. (con particolare, usiamo il classico Teorema delle contrazioni per spazi metrici completi.) (Caffarelli de Lu)

Detto questo, ci restringiamo senz'altro al caso di un'equazione differenziale puramente spaziale (in generale) $dY = A(Y)dX$, in quanto per riuscire ad affrontar con successo il caso generale "col $+f(Y)dt$ " basterà applicare le tecniche e le Atome che vedremo a breve con quelle ben note delle teorie classiche delle ODEs. Inoltre, saremo di conseguenza risolti (in ipotesi di regolarità) una più generale equazione differenziale spaziale non-autonoma

$$\int_0^t dY_s = f_0(Y_s, s) ds + A(Y_s, s) dX_s \text{ su } [0, T], \quad \text{e meglio (su gli stessi notevoli)} \\ Y_0 = \xi$$

di (oc'enzia) $dY_t = A(Y_t, t) dX_t$: infatti, naturalmente, basterà risolvere $d\hat{Y} = A(\hat{Y})d\hat{X}$ dove $\hat{Y}_t := (Y_t, t)$, e dove $\hat{X} := (X, \bar{X})$ con $\bar{X}_t := (X_t, t)$ e con $\hat{X}_{n,t} := \sum_{\pi} (X_{\pi, \pi} - X_{\pi-1, \pi-1}) \otimes (dX_{\pi}, d\pi)$, intendendo ovviamente che:

$$\sum_{\pi} X_{\pi, \pi} \otimes dX_{\pi} = \bar{X}_{n,t} \text{ (che è dato), mentre } \sum_{\pi} X_{\pi, \pi} d\pi \text{ e } \sum_{\pi} (\pi - \pi_{-1}) dX_{\pi} \text{ sono}$$

(integrali iterati) ("integrali iterati")

elementari integrali di Riemann-Stieltjes. (n.b. in $[0, T]$) (Atte ∇ : una storia "diversa" (potrebbe) (probabilmente) e altre (migliaia!))

(per rinviare l'ordine del libro) ($\Rightarrow \frac{1}{2} \in [2, 5]$)

PROPOSIZIONE 8.3: una storia a priori. (Pag. 105) Siano $T \in (0, 1]$, $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $(V, \|\cdot\|)$ e $(W, \|\cdot\|)$ Banach (reali), e siano $\xi \in W$, $A \in G_b^2(W, \mathcal{L}(V, W))$ e $X = (X, \bar{X}) \in G^\alpha([0, T], V)$. Supponiamo che esista $(Y, Y') := (Y, A(Y)) \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], W)$ tale che $Y_t = \xi + \int_0^t A(Y_s) dX_s$ per ogni $t \in [0, T]$. (Per cui forniamo classico prendere $Y' = A(Y)$) Allora esiste $C_\alpha \in (0, \infty)$ tale per cui valga la stima (a priori)

$$\|Y\|_\alpha \leq C_\alpha \left\{ (\|A\|_{G_b^2} \|X\|_\alpha) \vee (\|A\|_{G_b^2} \|X\|_\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right\}, \text{ e cioè, più approssimativamente}$$

$$\|Y\|_\alpha \lesssim \|X\|_\alpha \vee \|X\|_\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

($\rightarrow$ enunciato analogo al caso Young, ma con alcune differenze (vedi la nota 1.1))

7) Qualche commento: $\odot C_2 = C_{2,T}$ purché $T \leq 1$, e per il resto $[Y]_2$ è controllato giustamente da f e da X , ma non da ξ , ed in effetti in $[Y]_2$ ci sono gli incrementi di Y (come in $dY = \dots$). NOTA $\forall 0 \leq s \leq t \leq T$, $Y_{s,t} = \int_s^t f(Y_u) dX_u$.

$\odot f$ potrebbe anche non fare regolare, tipo G_b^3 , ma comunque benestante $\|f\|_{G_b^3}$ fa la stima.

$\odot$ Il "curioso" modo delle stime è dovuto all'ESERCIZIO 4.24 assisto, come dimostreremo.

$\odot$ Come nel caso Young, il teorema di esistenza e unicità in ipotesi di regolarità NON necessita luce.) di alcune stime e quindi (che forse rimane in ipotesi di più scarse regolarità?...) (G_b^3)

DIMOSTRAZIONE. (Delle Prop. 8.3, in più punti.) ∇ colossi da fare non finiscono numerosi, ma l'idea è molto naturale: anzitutto, in primo luogo, volendo ottenere una

maggiorazione per $[Y]_2$, ne cercheremo una effettiva per $[Y]_{2,h}$ con $h \in (0, T]$ opportuna, anche forse molto piccola rispetto a T (ma... molto analitici!).

Infattivamente, dopo di che, in secondo luogo, dovremo trovare per tutto il tempo con $C_{1,h}$ anziché C_1 , e con $C_{1,h}$ anziché C_1 , ed il problema principale sarà maggiorare

$[R^Y]_{2,h}$ in funzione di $[Y]_{2,h}$. Semplici, una maggiorazione in senso inverso di $[Y]_{2,h}$ con $[R^Y]_{2,h}$ è data in modo piuttosto immediato dal solito sviluppo

al secondo ordine "di Gubinelli" $Y_{s,t} = Y_s^1 X_{s,t} + R_{s,t}^Y$, $0 \leq s < t \leq T$, dove prendiamo $Y^1 = A(Y)$ (date le ipotesi); inoltre, d'altra parte, Y è una

"speciale" funzione di x stesso, per ipotesi, per cui dovrebbe esser possibile trovare e me volte $[R^Y]_{2,h}$ con $[Y]_{2,h}$, effettuato (ovvero per $h \leq T$).

Effettivamente, il testo rinuncia piuttosto bene, a meno di un paio di elementari "scogli" tecnici: il primo, quello di maggiorare $[R^{f(Y)}]_{2,h}$ con $[R^Y]_{2,h}$ e

$[Y]_{2,h}$; il secondo, in occasione delle varie e proprie conclusioni delle dimostrazioni

PASSO 1: importiamo le "catene" di maggiorazioni (usando già le speciali forme di Y^1) ("STEP 1") ∇ $\forall h \in (0, T]$, $[Y]_{2,h} \leq \|f\|_{\infty} [X]_{2,h} + [R^Y]_{2,h} h^2$.

Dim. Per ogni $h \in (0, T]$ e $0 \leq s < t \leq T$ con $t-s \leq h$, se $I = [s, t]$, allora da $Y_{s,t} = Y_s^1 X_{s,t} + R_{s,t}^Y = f(Y_s) X_{s,t} + R_{s,t}^Y$ deduciamo subito che $|Y_{s,t}| \leq \|f\|_{\infty} |X_{s,t}| + |R_{s,t}^Y|$

$\leq \|f\|_{\infty} [X]_{2,I} (t-s)^2 + [R^Y]_{2,I} (t-s)^2 \leq (\|f\|_{\infty} [X]_{2,h} + [R^Y]_{2,h} h^2) (t-s)$ da cui subito $[Y]_{2,I} \leq \|f\|_{\infty} [X]_{2,h} + [R^Y]_{2,h} h^2$, ossia la tesi.

PASSO 2: mettiamo in relazione $R^{f(Y)}$ a Y e R^Y (senza usare ancora che $Y^1 = f(Y)$).

Per ogni $h \in (0, T]$, $[R^{f(Y)}]_{2d;h} \leq \frac{1}{2} \|D^2 f\|_{\infty} [Y]_{2d;h}^2 + \|Df\|_{\infty} [R^Y]_{2d;h}$.

(NOTA. Dato che $f \in C_b^2(W, \mathbb{R})$, abbiamo che $D^2 f(w) \in \mathcal{L}(W \otimes W, \mathbb{R})$ per ogni $w \in W$.)

[Dim. Per ogni $h \in (0, T]$, abbiamo $f(Y)' = Df(Y) \cdot Y'$, e quindi, per ogni $0 \leq s < t \leq T$, $R_{s,t}^{f(Y)} \stackrel{(\text{def.})}{=} f(Y)_{s,t} - f(Y)_s X_{s,t} = f(Y_t) - f(Y_s) - Df(Y_s) Y'_s X_{s,t}$.

D'altra parte, $Y'_s X_{s,t} \stackrel{(\text{def.})}{=} Y_{s,t} - R_{s,t}^Y$, dunque (per linearità di $Df(Y_s)$)
 $R_{s,t}^{f(Y)} = f(Y_t) - f(Y_s) - Df(Y_s) Y_{s,t} + Df(Y_s) R_{s,t}^Y$, da cui immediatamente
 $(= \frac{1}{2} D^2 f(Y_{(s,t)})(Y_{s,t} \otimes Y_{s,t}))$

$|R_{s,t}^{f(Y)}| \leq \frac{1}{2} \|D^2 f\|_{\infty} |Y_{s,t}|^2 + \|Df\|_{\infty} |R_{s,t}^Y| \stackrel{(\text{ind.})}{\leq} \frac{1}{2} \|D^2 f\|_{\infty} [Y]_{2d;s,t}^2 (t-s)^{2d} + \|Df\|_{\infty} [R^Y]_{2d;s,t} (t-s)^{2d}$.
 Pertanto, per ogni $h \in (0, T]$ e per ogni $0 \leq s < t \leq T$ con $t-s \leq h$, vale $|R_{s,t}^{f(Y)}| \leq \left(\frac{1}{2} \|D^2 f\|_{\infty} [Y]_{2d;h}^2 + \|Df\|_{\infty} [R^Y]_{2d;h} \right) (t-s)^{2d}$.

PASSO 3: per ogni $h \in (0, T]$, migliorare $[R^Y]_{2d;h}$ in funzione "anche" di $[Y]_{2d;h}$ (usando $Y' = f(Y)$) (+ TEOREMA DI GUBINELLI, PUNTO 1)

$\rightarrow \forall h \in (0, T]$, $[R^Y]_{2d;h} \stackrel{(\text{anche})}{\leq}_{(d,f,Df,D^2f)} [X]_{2d;h} + h^d \left([X]_{2d;h} \cdot [R^{f(Y)}]_{2d;h} + [X]_{2d;h} [f(Y)]_{2d;h} \right)$
 $(\leq_{(d,f,Df,D^2f)} [Y]_{2d;h}^2 + [R^Y]_{2d;h}) (\leq \|f\|_{\infty} [Y]_{2d;h})$

$\rightarrow$ di conseguenza, grazie al PASSO 2, esiste $C_1 = C_1(d, f, Df, D^2 f) \in (0, \infty)$ tale che
 $\forall h \in (0, T]$, $[R^Y]_{2d;h} \leq C_1 [X]_{2d;h} + C_1 h^d [X]_{2d;h} [Y]_{2d;h}^2 + C_1 h^d [X]_{2d;h} [R^Y]_{2d;h} + C_1 h^d [X]_{2d;h} [Y]_{2d;h}$.

[Dim. Per ogni $h \in (0, T]$ e $0 \leq s < t \leq T$ con $t-s \leq h$, abbiamo per ipotesi che $Y_{s,t} = \int_s^t f(X_u) dX_u$ e $Y'_s = f(Y_s)$, per cui $R_{s,t}^Y \stackrel{(\text{def.})}{=} Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t} = \int_s^t f(X_u) dX_u - f(Y_s) X_{s,t}$.
 Adesso, sottraendo ed aggiungendo (al RHS) il termine $f(Y)_s' X_{s,t} = (Df(Y_s) Y'_s) X_{s,t} = (Df(Y_s) f(Y_s)) X_{s,t}$, deduciamo subito che

$|R_{s,t}^Y| \leq \left| \int_s^t f(X_u) dX_u - f(Y_s) X_{s,t} - f(Y)_s' X_{s,t} \right| + |Df(Y_s) f(Y_s) X_{s,t}|$
 $\leq C_1 \left([X]_{2d;s,t} \cdot [R^{f(Y)}]_{2d;s,t} + [X]_{2d;s,t} \cdot [f(Y)]_{2d;s,t} \right) |t-s|^{2d} + \left(\sum_{(u,v)} [X]_{2d;u,v} H_{u,v}(2d) \right) |t-s|^{2d}$
 $\stackrel{(\text{Gubinelli, 1})}{\leq} C_1 \left([X]_{2d;s,t} \cdot [R^{f(Y)}]_{2d;s,t} + [X]_{2d;s,t} \cdot [f(Y)]_{2d;s,t} \right) |t-s|^{2d}$
 $\stackrel{(\text{TS1})}{\leq} C_1 \left([X]_{2d;s,t} \cdot [R^{f(Y)}]_{2d;s,t} + [X]_{2d;s,t} \cdot [f(Y)]_{2d;s,t} \right) |t-s|^{2d}$

da cui $|R_{s,t}^Y| \leq \left([X]_{2d;h} [R^{f(Y)}]_{2d;h} + [X]_{2d;h} [f(Y)]_{2d;h} \right) h^d + [X]_{2d;h} (t-s)^{2d}$.

PASSO 4: alle luce del PASSO 1, "migliorare" le (secondo) stime del PASSO 3

(8) precedente "mondo $h \downarrow 0$ ", sperando di far "prevedere" solo $[X]_{\alpha;h}$ e $[Y]_{\alpha;h}^2$. (IDEA: prevedere h piccolo abbastanza affinché $h^{\alpha} \|X\|_{\alpha} \ll 1$). (NOTA: $\forall h \in (0,1)$, $[X]_{\alpha;h} \leq [X]_{\alpha}$ e $[X]_{\alpha;h} \leq [X]_{\alpha}$).

Già da una costante $C_2 \equiv C_2(\alpha, \beta, D^2\beta, D^2\beta, (X, X)) \in (0, \infty)$ tale che, per ogni $h \equiv h(\alpha, \beta, D^2\beta, D^2\beta, (X, X)) \in (0,1]$ piccolo abbastanza affinché risulti $(C_1 h^{\alpha} [X]_{\alpha}) \vee (C_1 h^{\alpha} [X]_{\alpha}^{1/2}) \leq \frac{1}{2}$ (per ottenere il quadrato di un opportuno binomio...), (costante "mondo $h \downarrow 0$ ") (ricordiamo che in $\| \cdot \|_{\alpha}$ c'è $C^{1/2}$!).

sic $[R^Y]_{\alpha;h} \leq C_1 [X]_{\alpha;h} + 2 [Y]_{\alpha;h}^2$; (← PASSO 3)

→ di conseguenza, grazie anche al PASSO 1, esistono costanti $C_3, C_4 \in (0, \infty)$ (dipendenti solo da $\alpha, \beta, D^2\beta$ e $D^2\beta$), tali che, sempre per questi $h \downarrow 0$, si ha $C_3 h^{\alpha} [Y]_{\alpha;h} \leq C_4 h^{\alpha} \|X\|_{\alpha} + (C_3 h^{\alpha})^2 [Y]_{\alpha;h}^2$.

[Dim. Per ogni $h \in (0,1]$ tale che $C_1 h^{\alpha} [X]_{\alpha}^{1/2} \leq \frac{1}{2}$, è $C_1 h^{\alpha} [X]_{\alpha;h} = (C_1 h^{\alpha} [X]_{\alpha;h}^{1/2}) \cdot [X]_{\alpha;h}^{1/2} \leq [X]_{\alpha;h}^{1/2}$. Dunque, $\forall h \in (0,1]$ tale che $C_1 h^{\alpha} [X]_{\alpha} \leq \frac{1}{2}$ e anche $C_1 h^{\alpha} [X]_{\alpha}^{1/2} \leq \frac{1}{2}$, la seconda stima del PASSO 3 precedente ci dà che

$[R^Y]_{\alpha;h} \leq C_1 [X]_{\alpha;h} + \frac{1}{2} [Y]_{\alpha;h}^2 + \frac{1}{2} [R^Y]_{\alpha;h} + [X]_{\alpha;h}^{1/2} [Y]_{\alpha;h}$, o cioè che $[R^Y]_{\alpha;h} \leq 2C_1 [X]_{\alpha;h} + [Y]_{\alpha;h}^2 + 2[X]_{\alpha;h}^{1/2} [Y]_{\alpha;h}$ (moltiplicando per 2 e portando $[R^Y]_{\alpha;h}$ al LHS). Adesso, visto che $2[X]_{\alpha;h}^{1/2} [Y]_{\alpha;h} \leq [X]_{\alpha;h} + [Y]_{\alpha;h}^2$ (in quanto $([X]_{\alpha;h}^{1/2} - [Y]_{\alpha;h})^2 \geq 0$), risulta evidente la prima stima desiderata (mondo $h \downarrow 0$) $C_2 \equiv 2C_1 + 1$.

✓ A questo punto, sempre per tali $h \downarrow 0$, otteniamo che $[Y]_{\alpha;h} \leq \|f\|_{\infty} [X]_{\alpha;h} + h^{\alpha} [R^Y]_{\alpha;h} \leq \|f\|_{\infty} [X]_{\alpha;h} + C_2 h^{\alpha} [X]_{\alpha;h} + 2 h^{\alpha} [Y]_{\alpha;h}^2$. Ma, come visto, $h^{\alpha} [X]_{\alpha;h} \leq \frac{1}{C_1} [X]_{\alpha;h}^{1/2}$ e pertanto esiste $C_3 \equiv C_3(\alpha, \beta, D^2\beta, D^2\beta) \in (0, \infty)$ tale per cui

$[Y]_{\alpha;h} \leq C_3 ([X]_{\alpha;h} + [X]_{\alpha;h}^{1/2}) + C_3 h^{\alpha} [Y]_{\alpha;h}^2$. Così, la seconda stima desiderata (mondo $h \downarrow 0$) (ovvio) $(\leq \|X\|_{\alpha})$ si ottiene subito da quest'ultima moltiplicando entrambi i membri per $C_3 h^{\alpha}$ (e ponendo $C_4 \equiv (C_3)^2$).

NOTAZIONE: alla luce dell'ultima stima verificata, poniamo per ogni $h \downarrow 0$ $\psi_h \equiv C_3 h^{\alpha} [Y]_{\alpha;h}$ e $\lambda_h \equiv C_4 h^{\alpha} \|X\|_{\alpha}$. (NOTA: Una costante differente fra le due è che $\lambda_h \downarrow 0$ per $h \downarrow 0$, mentre per ψ_h non c'è detto!)

Dunque, nel PASSO 4 precedente abbiamo scoperto che $(\forall h \downarrow 0)$

$\psi_h \leq \lambda_h + (\psi_h)^2$.

② "TEOREMA 8.4": "di esistenza e unicita". (Pag. 112.) Siano $T \in (0, 1]$, $\beta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $(V, \|\cdot\|)$ e $(W, \|\cdot\|)$ Banach (reali), e siano $\xi \in W$, $f \in (G_b^2 \cap G^3)(W, \mathcal{B}(V, W))$ e $X = (X, \dot{X}) \in G^p([0, T], V)$. Allora esiste $T_0 \in (0, T]$ ($T_0 \ll T$) tale per cui esiste uno ed un solo elemento $(Y, Y') \in D_X^{2p}([0, T_0], W)$ tale che $Y_t = \xi + \int_0^t f(Y_s) dX_s$ per ogni $t \in [0, T_0]$. Inoltre, $Y' = f(Y)$ e, se in realtà $f \in G_b^3$, allora possiamo prendere $T_0 = T$.

($\rightarrow$ enunciato $f \in G_b^3$ Young, ma con altri (più complessi) ...)

Qualche commento: $\circ$ La dimostrazione che proponiamo si basa soprattutto sul classico Teorema delle contrazioni (o del punto fisso) per spazi metrici completi, che noi applichiamo a $(D_X^{2p}([0, T], W), \|\cdot\|_{X, 2p})$, o meglio ad un suo sottospazio chiuso e limitato, anche ispirati dalle precedenti stime e priori. Tuttavia, non sarà affatto automatica quest'applicazione, ed infatti avremo bisogno di "espansione" nell'ambito di un altro $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ con $\alpha < \beta$ (di notazione più "familia"!) in modo che sostanzialmente $T^{\beta-\alpha} \downarrow 0$ per $T \downarrow 0$. $\circ$ Guardando invece Y' , non stiamo affermando che $Y' = f(Y)$ è l'unica derivata di Gubinelli delle "soluzioni" Y : semplicemente, $(Y, f(Y))$ sarà il solo punto fisso che troveremo grazie alle pre-enunciato espansione del Teorema delle contrazioni su D_X^{2p} (anzi, su un suo limitato).

$\circ$ Se $f \in G_b^3$, allora il $T_0 \ll T$ dell'esistenza e unicita locali può essere preso indipendente da ξ , per cui il prolungamento a tutto $(0, T]$ diventa un procedimento automatico.

DIMOSTRAZIONE. (Del Teo. 8.4, in più pezzi.) **PASSO 1:** introduciamo "oggetti", enumerazioni e stime in vista di un'applicazione del Teorema delle contrazioni. Grazie al Lemma 7.3 e al Teorema di Gubinelli (e alle ipotesi), risulta continuo, per ogni $\frac{1}{3} < \alpha < \beta \leq \frac{1}{2}$, la mappa da $D_X^{2\alpha}([0, T], W)$ in se' " $\mathcal{M}_T$ ": $D_X^{2\alpha}([0, T], W) \rightarrow D_X^{2\alpha}([0, T], W)$ data da $\mathcal{M}_T((Y, Y')) \stackrel{\text{def.}}{=} (\xi + \int_0^\cdot f(Y_s) dX_s, f(Y_\cdot))$: vogliamo dimostrare che, almeno per $T \downarrow 0$, $\mathcal{M}_T$ ammette uno ed un solo punto fisso $(Y, Y') (= \mathcal{M}_T(Y, Y'))$ (punto), e che anzi $(Y, Y') \in D_X^{2p}([0, T], W)$.

(dato il Teorema di Gubinelli, punto $\mathcal{M}_T$ (con $\alpha(Y)$ al posto di Y))

oss. Dato che $(X, \dot{X}) \in G^p([0, T], V)$, e' premessa "automatica" che, $\forall \frac{1}{3} < \alpha < \beta \leq \frac{1}{2}$, se $(Y, Y') = (\xi + \int_0^\cdot f(Y_s) dX_s, f(Y_\cdot)) \in D_X^{2\alpha}([0, T], W)$, allora $(Y, Y') \in D_X^{2p}([0, T], W)$.

Detto brevemente, la "regolarità" sarebbe garantita, per cui possiamo dimenticare

[Dim. Anzitutto, notiamo che $\frac{1}{2} < \alpha < \beta \leq \frac{1}{2}$ dà, equivalentemente, sia che $2\alpha > \frac{2}{\beta} > \frac{1}{2} \geq \beta$ che cui $2\alpha > \beta$, sia che $3\alpha > 1 \geq \frac{2}{\beta}$ che cui $3\alpha > 2\beta$ (momentaneamente da $3\alpha = 2\alpha + \alpha$ non si concludono).

Adesso, stiamo supponendo che $Y_t = \xi + \int_0^t f(Y_s) dX_s$, $t \in [0, T]$, sia in $\tilde{G}^\alpha([0, T], W)$ con $Y' = f(Y)$ in $\tilde{G}^\alpha([0, T], \mathcal{L}(V, W))$ tale che

$R^Y_{n,t} \stackrel{\text{def}}{=} Y_{n,t} - Y'_n X_{n,t} = \int_0^t f(Y_s) dX_s - f(Y_n) X_{n,t}$, $(n, t) \in [0, T]^2$, sia in $\tilde{G}_2^{2\alpha}([0, T], W)$

Vogliamo dimostrare che, se $(X, X') \in \tilde{G}^\beta([0, T], V)$, allora $Y \in \tilde{G}^\beta([0, T], W)$, $Y' \in \tilde{G}^\beta([0, T], \mathcal{L}(V, W))$ e $R^Y \in \tilde{G}_2^{2\beta}([0, T], W)$.

Alle, infatti, da $Y_{n,t} = Y'_n X_{n,t} + R^Y_{n,t}$ deduciamo subito che $|Y_{n,t}| \leq \|Y'_n\|_\infty |X_{n,t}| + [R^Y]_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha} \lesssim |t-s|^\beta$, da cui

che $Y \in \tilde{G}^\beta$; dunque pure $Y' = f(Y) \in \tilde{G}^\beta$. Dunque, per R^Y , il punto 1 del Teorema di Gubinelli (con $f(Y)$ al posto di Y) ci dà che $R^Y \in \tilde{G}_2^{2\beta}$ in quanto

$|R^Y_{n,t}| \stackrel{\text{OK}}{=} \left| \int_0^t f(Y)_n dX_s \right| \leq \|f(Y)_n\|_\infty |X_{n,t}| + O(|t-s|^{3\alpha}) \lesssim |t-s|^{2\beta}$ come richiesto.

[NOTA. Dunque, la Proposizione 8.3 ci darebbe che $[Y]_p \lesssim \|X\|_p \vee \|X\|_p^{1/p} \dots$!]
Piu' precisamente, forniamo uno del Teorema delle contrazioni su di un sottosistema chiuso e limitato di un sottospazio affine di $\mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], W)$, per $T \downarrow 0$, piuttosto che su tutto $\mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], W)$; e tale "strada" dimostrativa non si dimostra e non risulta tecnica nei calcoli (così come è stata l'introduzione di un $\alpha < \beta$), ma si rivelerà pure molto naturale.

Infatti, continuiamo con la seguente, elementare osservazione:

→ per ogni $(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], W)$, vale chiaramente che $\mathcal{Alt}_T(Y, Y') \Big|_{t=0} = (\xi, f(\xi))$, per cui il sottosistema affine di $\mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], W)$ definito come

$\mathcal{D}_{X, (\xi, f(\xi))}^{2\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \{(Y, Y') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], W) \mid Y_0 = \xi, Y'_0 = f(\xi)\}$ risulta

$\mathcal{Alt}_T$ -invariante (nel senso che $\mathcal{Alt}_T(\mathcal{D}_{X, (\xi, f(\xi))}^{2\alpha}) \subseteq \mathcal{D}_{X, (\xi, f(\xi))}^{2\alpha}$), (cioè $\forall T$)

Un "molto naturale" elemento di $\mathcal{D}_{X, (\xi, f(\xi))}^{2\alpha}$ è, ad esempio, $(\xi + f(\xi)X_{0,\cdot}, f(\xi))$, ovvero il cammino $t \mapsto \xi + f(\xi)X_{0,t}$ "affine" della più semplice di Gabriel

identicamente $\equiv f(\xi)$ (abbiamo scelto lei).

Il fatto è che $(\xi + f(\xi)X_{0,\cdot})_{s,t} = f(\xi)X_{s,t}$, per cui il cammino $\equiv f(\xi)$ lo stesso $\equiv 0$ per $\xi + f(\xi)X_{0,\cdot}$ stesso, come è immediato riconoscere. [NOTA: invece $(\xi, f(\xi)) \notin$

10 $\notin \mathcal{D}_X^{2d}([0, T], W)$, poiché $R^\xi = -A(\xi)X_{0,t}$ ed in generale $A(\xi) \neq 0$ e $X \notin \mathcal{G}^{2d}$.]
Consideriamo quindi la palla unitaria (chiusa) " $\mathcal{B}_T$ " di $\mathcal{D}_{X,(\xi, A(\xi))}^{2d}$ centrata proprio
in $(\xi + A(\xi)X_0, A(\xi))$ (la quale resta $\|\cdot\|_{X,2d}$ -completa), vale a dire

$$\mathcal{B}_T \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (Y, Y') \in \mathcal{D}_{X,(\xi, A(\xi))}^{2d} \mid \left\| (Y, Y') - (\xi + A(\xi)X_0, A(\xi)) \right\|_{X,2d} \leq 1 \right\}.$$

[Su $\mathcal{D}_{X,(\xi, A(\xi))}^{2d}$ è chiaro che $\|\cdot\|_{X,2d} = \|\cdot\|_{X,2d}$.]

Non perdiamo affatto motore ma che $\mathcal{B}_T = \left\{ (Y, Y') \in \mathcal{D}_{X,(\xi, A(\xi))}^{2d} \mid \left\| (Y, Y') \right\|_{X,2d} \leq 1 \right\}$.

Dim. È molto semplice, anche intuitivo $[Z, Z']_{X,2d} \stackrel{\text{def}}{=} [Z]_\alpha + [R^Z]_{2d}$ per ogni $(Z, Z') \in \mathcal{D}_X^{2d}([0, T], W)$
(con $R_{n,t}^Z \stackrel{\text{def}}{=} Z_{n,t} - Z'_n X_{n,t}$); ed ora $(Y - \xi - A(\xi)X_0, Y' - A(\xi)) =: (Z, Z')$ ha
evidentemente $[Z]_\alpha = [Y]_\alpha$, mentre $R_{n,t}^Z \stackrel{\text{def}}{=} (Y_{n,t} - A(\xi)X_{n,t}) - (Y'_n - A(\xi))X_{n,t} \stackrel{\text{def}}{=} R_{n,t}^Y$,
evidentemente coincidenti.]

Oss. (Assumendo in mente il Lemma 7.3.) Dunque, per ogni $(Y, Y') \in \mathcal{B}_T$, vale la maggiorazione
uniforme $|Y'_0| + \left\| (Y, Y') \right\|_{X,2d} \leq "M" := \|A\|_\infty + 1$. ($\Rightarrow M \in \mathbb{R}, \infty$.)
 $(\xi = A(\xi)X_0 \leq \|A\|_\infty \|X_0\|)$ $(\xi \leq 1)$

Cosa vogliamo fare: dimostrare che $\mathcal{B}_T$ è $\mathcal{A}ll_T$ -invariante, almeno per $T \downarrow 0$,
e che $\mathcal{A}ll_T|_{\mathcal{B}_T}$ è una $\|\cdot\|_{X,2d}$ -contrazione di $\mathcal{B}_T$ in sé, per $T \downarrow 0$ (eventualmente
ancora più piccoli), essendo cura nel mentre di rimarcare dove le regole di A
se la differenza. In formule, vogliamo verificare che:

- I per $T \downarrow 0$, $\mathcal{A}ll_T(\mathcal{B}_T) \subseteq \mathcal{B}_T$; ("INVARIANZA")
- II per $T \downarrow 0$, esiste $K_0 \in (0, 1)$ tale che, per ogni $(Y, Y'), (\tilde{Y}, \tilde{Y}') \in \mathcal{B}_T$,
 $\left\| \mathcal{A}ll_T((Y, Y')) - \mathcal{A}ll_T((\tilde{Y}, \tilde{Y}')) \right\|_{X,2d} \leq K_0 \cdot \left\| (Y - \tilde{Y}, Y' - \tilde{Y}') \right\|_{X,2d}$. ("CONTRAZIONE")

Da tali I e II, e del Teo. delle contrazioni, le tesi desiderate discendono (quasi)
immediatamente (e meno di precisare il ruolo di $A \in \mathcal{G}_b^3$), e comunque abbiamo ormai
tutti gli strumenti per risolvere I e II stessi.

Allettiamoci da parte un paio di stime (di cui la prima immediata (dal Lemma 7.3), e la
seconda leggermente più laboriosa (basate nel Teorema di Grönwall), prima di passare a I e II).

a Per ogni $(Y, Y') \in \mathcal{B}_T$, $\left\| (Y, Y') \right\|_{X,2d} \leq C_{2,T} \cdot M \cdot \|A\|_\infty \cdot (|Y'_0| + \left\| (Y, Y') \right\|_{X,2d})$.

Dim. È lo stimo del Lemma 7.3 nel caso $T \leq 1$ ($\Rightarrow C_{2,T} = C_2$), con costante che ingloba $(1 + (X'_0)_2)^2$, e
dove $M = 1 + \|A\|_\infty$ ($\rightarrow$ vedi ultime Oss.).] ($\left\| \mathcal{A}ll_T((Y, Y')) \right\|_{X,2d}$!)

b Per ogni $(Y, Y') \in \mathcal{B}_T$, $\left\| \int_0^\cdot A(Y) dX, A(Y) \right\|_{X,2d} \leq [A(Y)]_\alpha + C_{\beta, \alpha, (X, X)} \left(|Y'_0| + \left\| (Y, Y') \right\|_{X,2d} \right) \cdot T^{\beta/2}$.

Dim. Il punto I del Teorema di Gubinelli con $T \leq 1$ dà $[\int_0^t f(Y) dX, f(Y)]_{x,2\alpha} \leq [f(Y)]_\alpha + \|f(Y)'\|_\infty [X]_{2\alpha} + C_\alpha ([X]_\alpha [R^{f(Y)}]_{2\alpha} + [X]_{2\alpha} \|f(Y)'\|_\alpha)$. Adesso, usando che $\|f(Y)'\|_\infty \leq \|f(Y)'\| + [f(Y)']_\alpha$ e che $[X]_\alpha \vee [X]_{2\alpha} \leq [X]_\alpha + [X]_{2\alpha}$, otteniamo (e meno di "ingenuità" C_α)

$$[\int_0^t f(Y) dX, f(Y)]_{x,2\alpha} \leq [f(Y)]_\alpha + C_\alpha (\|f(Y)'\| + [f(Y)']_\alpha + [R^{f(Y)}]_{2\alpha}) ([X]_\alpha + [X]_{2\alpha}).$$

Concludiamo osservando che $[X]_\alpha \leq [X]_\beta T^{\beta-\alpha}$ e che $[X]_{2\alpha} \leq [X]_{2\beta} T^{2(\beta-\alpha)}$; ma $\beta-\alpha > 0$, $2(\beta-\alpha) > \beta-\alpha > 0$, mentre $T \leq 1$, quindi $T^{2(\beta-\alpha)} \leq T^{\beta-\alpha}$.

PASSO 2: dimostriamo II ("INVARIANZA") (usando a e b). (Per le quali basta che $f \in G_b^2$, come è noto per a e b.)

Per ogni $(Y, Y') \in \mathcal{B}_T$, è $[Y]_\alpha \leq T^{\beta-\alpha}$ e quindi, usando le stime a nelle stime b, è anche

$$[\mathcal{M}_T(Y, Y')]_{x,2\alpha} \leq G_{\alpha, \beta, (X, X')} \cdot \|f\|_{G_b^2} \cdot T^{\beta-\alpha} \quad (\text{il quale è } \leq 1 \text{ per } T \downarrow 0).$$

Dim. Dal solito sviluppo $Y_{n,t} = Y_n^0 X_{n,t} + R_{n,t}^Y$ deduciamo subito che $|Y_{n,t}| \leq \|Y\|_\infty |X_{n,t}| + [R^Y]_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha} \leq M |X_{n,t}| + |t-s|^{2\alpha}$. Che basta osservare (e anche $[R^Y]_{2\alpha} \leq [Y, Y']_{x,2\alpha} \leq 1$)

che $|X_{n,t}| \leq [X]_\beta |t-s|^\beta \leq [X]_\beta T^{\beta-\alpha} |t-s|^\alpha$, mentre (come segue) $|t-s|^{2\alpha} \leq |t-s|^\beta \leq T^{\beta-\alpha} |t-s|^\alpha$ di meno. Dunque, impostando le stime b ed applicando le stime a, otteniamo che

$$[\mathcal{M}_T(Y, Y')]_{x,2\alpha} \stackrel{(\text{OK})}{=} [\int_0^t f(Y) dX, f(Y)]_{x,2\alpha} \stackrel{(\text{b})}{\leq} [f(Y)]_\alpha + G_{\alpha, \beta, (X, X')} (\|f(Y)'\| + M \cdot \|f\|_{G_b^2} \cdot (|Y^0| + [Y, Y']_{x,2\alpha})) \cdot T^{\beta-\alpha},$$

da cui la tesi.

perché' efficienti $[f(Y)]_\alpha \leq \|f\|_\infty [Y]_\alpha \leq T^{\beta-\alpha}$.

PASSO 3: dimostriamo III ("CONTRAZIONE") (usando davvero che $f \in G^3$).

Per ogni $(Y, Y'), (\tilde{Y}, \tilde{Y}') \in \mathcal{B}_T$, osservando che $[f(Y) - f(\tilde{Y})]_\alpha \leq \|f\|_{G_b^3} \cdot [Y - \tilde{Y}]_\alpha$ e che una stima "tipo b" vale in modo del tutto analogo se vi sostituisce $f(Y)$ con la differenza $f(Y) - f(\tilde{Y})$, riceviamo subito

$$[\mathcal{M}_T(Y, Y') - \mathcal{M}_T(\tilde{Y}, \tilde{Y}')]_{x,2\alpha} \leq G \|f\|_{G_b^3} [Y - \tilde{Y}]_\alpha + G \cdot [f(Y) - f(\tilde{Y}), f(Y)' - f(\tilde{Y})']_{x,2\alpha}$$

D'altra parte, scegliamo le due stime seguenti:

(i) $[Y - \tilde{Y}]_\alpha \leq C_{\alpha, \beta, X} \cdot T^{\beta-\alpha} \cdot [Y - \tilde{Y}, Y' - \tilde{Y}']_{X, 2\alpha}$

(ii) $[f(Y) - f(\tilde{Y}), f(Y)' - f(\tilde{Y})']_{X, 2\alpha} \leq C_{\alpha, X, \|f\|_{G_b^3}} \cdot [Y - \tilde{Y}, Y' - \tilde{Y}']_{X, 2\alpha}$, dove

definito per quest'ultima occorre che $f \in G^3$. Mettendo insieme queste tre stime, le II ne è immediata conseguenza per $T \downarrow 0$.

Dim. Cominciamo calcolando $f(Y) - f(\tilde{Y})_{n,t} \stackrel{(iii)}{=} Df(\eta_t)(Y_t - \tilde{Y}_t) - Df(\eta_n)(Y_n - \tilde{Y}_n) \stackrel{(iii)}{=} Df(\eta_t)(Y - \tilde{Y})_{n,t} - (Df(\eta_n) - Df(\eta_t))(Y_n - \tilde{Y}_n) \stackrel{(iii)}{=} Df(\eta_t)(Y - \tilde{Y})_{n,t} - (Df(\eta_n) - Df(\eta_t))(Y_n - \tilde{Y}_n)$ (non è $Df(\eta_t)(Y_n - \tilde{Y}_n)$ al RHS): dunque

$$|f(Y) - f(\tilde{Y})_{n,t}| \leq \|Df\|_\infty |Y - \tilde{Y}|_\alpha |t - n|^\alpha + |Df(\eta_t)(Y_n - \tilde{Y}_n) - Df(\eta_n)(Y_n - \tilde{Y}_n) + Df(\eta_n)(Y_t - \tilde{Y}_t) - Df(\eta_n)(Y_t - \tilde{Y}_t)| \dots$$

ESERCIZIO. Dovrei, e dovrei chiarire come ottenere la stima (b) ma con $f(Y) - f(\tilde{Y})$ al posto di $f(Y)$: esattamente come fatto per (b) "ora e qui", ma partendo dal Lemma 2 del Teorema di Gubinelli con $T \leq 1$ e con $f(Y) - f(\tilde{Y})$ al posto di Y . L'unica differenza formale è dovuta al fatto che

$$f(Y)'_0 - f(\tilde{Y})'_0 \equiv 0, \text{ in quanto } f(Y)'_0 = Df(Y_0)Y'_0 = Df(\xi)_0 f(\xi), = Df(\tilde{Y}_0)\tilde{Y}'_0 = f(\tilde{Y})'_0 \text{ (quando } (Y, Y'), (\tilde{Y}, \tilde{Y}') \in \mathcal{D}_{X, (Y, Y')}(t))$$

Periamo quindi alle (i), in realtà molto facile: visto che, per ogni $(Z, Z') \in \mathcal{D}_X^{2\alpha}([0, T], W)$,

$$|Z_{n,t}| \leq \|Z'\|_\infty |X_{n,t}| + [R^Z]_{2\alpha} |t - n|^{2\alpha} \leq (\|Z'\|_0 + \|Z'\|_\alpha) |X|_\beta + [R^Z]_{2\alpha} |t - n|^{2\alpha} \leq (\|Z'\|_0 + \|Z'\|_\alpha) |X|_\beta + [R^Z]_{2\alpha} |t - n|^{2\alpha}$$

$$\leq T^{\beta-\alpha} ((\|Z'\|_0 + \|Z'\|_\alpha) |X|_\beta + [R^Z]_{2\alpha}) |t - n|^\alpha, \text{ dato che } Z = Y - \tilde{Y} \text{ (ed entrambi di nuovo che } Y'_0 = f(\xi) = \tilde{Y}'_0).$$

Veniamo finalmente alle (ii): usando subito un "LEMMA" enunciato in precedenza

(ESERCIZIO 2, Foglio 6) grazie alle ipotesi $f \in G^3(W, \mathcal{L}(V, W))$, prendiamo una $g \in G_b^2(W \times W, \mathcal{L}(W, \mathcal{L}(V, W)))$ con $\|g\|_{G_b^2} \leq C_\alpha \|f\|_{G_b^3}$ tale per cui, $\forall t \in (0, T)$, $f(Y_t) - f(\tilde{Y}_t) = g(Y_t, \tilde{Y}_t)(Y_t - \tilde{Y}_t)$; in altri termini, per ogni $t \in (0, T)$ è

$$f(Y_t) - f(\tilde{Y}_t) = G_t \circ H_t \text{ con } G_t \equiv g(Y_t, \tilde{Y}_t) \in \mathcal{L}(W, \mathcal{L}(V, W)) \text{ e } H_t \equiv Y_t - \tilde{Y}_t \in W.$$

Allora, per un'eccezionale relazione al Lemma 7.3 e al Corollario 7.4, vale

$$[f(Y) - f(\tilde{Y}), f(Y)' - f(\tilde{Y})']_{X, 2\alpha} = [(GH), (GH)']_{X, 2\alpha} \leq C_{\alpha, X} \|G, G'\|_{X, 2\alpha} \|H, H'\|_{X, 2\alpha}. \text{ Che, essendo } H \equiv Y - \tilde{Y}, \text{ al posto } \|(H, H')\|_{X, 2\alpha} = \|(Y, Y')\|_{X, 2\alpha}, \text{ e questo è un fattore}$$

che otteniamo comparando l'ordine al RHS di (ii) : per ciò, abbiamo finito se verifico che $\|(G, G')\|_{X,2\alpha} \leq C_{\alpha,X,\gamma} \|f\|_{C_b^2}$. In effetti, $G_t = g(Y_t, \tilde{Y}_t)$ invece $G'_t = D_y g(Y_t, \tilde{Y}_t) \cdot Y'_t + D_{\tilde{y}} g(Y_t, \tilde{Y}_t) \cdot \tilde{Y}'_t$ (Esercizio) con le stime $\|(G, G')\|_{X,2\alpha} \leq C_{\alpha,X,\gamma} \|g\|_{C_b^2} \cdot 1 + (Y'_t, \tilde{Y}'_t) \in \mathcal{B}_T, \leq C_{\alpha,X} \|f\|_{C_b^2}$. Ma allora siamo alla fine, perché per il resto $|G_0| \leq \|g\|_{\infty} \leq C_2 \|f\|_{C_b^2}$ (stima maggiorata) e $|G'_0| \leq \|g\|_{C_b^2} (|Y'_0| + |\tilde{Y}'_0|) \stackrel{\text{(al solito)}}{\leq} 2 \|g\|_{C_b^2} \|df\|_{\infty} \leq 2 \|f\|_{\infty} \|f\|_{C_b^2}$. $\square$

NOTA. L'ESERCIZIO iniziale delle dimostrazioni del PASSO 3 è in realtà un LEMMA (ma immediato) : è il Lemma 3.2 del libro (pag. 108), usando che $Y_0 = \tilde{Y}_0 = \tilde{Y}_0$. Osserviamo comunque che è dovuto a tale lemma l'introduzione delle g che ci ha permesso di concludere. $\therefore$

Una domanda: } cose dire di una RDE tipo "BACKWARD" ($\rightarrow$ paragrafo 5.4)
 $dY = f(Y) \overleftarrow{dX}$? (Perché farsi il problema, e come si fanno sviluppare le cose)
 (Esercizio!)