Selezione di problemi

Successioni e funzioni

1. (CP 2000, Fase 1) Se $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + (-1)^{n-1}n$, con n intero positivo, allora $S_{1999} + S_{2000}$ è uguale a:

   A. -2 B. -1 C. 0 D. 1 E. 2

2. (CP 2003, Fase 2) Se scrivo 2003 nella forma $1-2+3-4+5-6+\cdots+(n-2)-(n-1)+n$, la somma delle cifre di n è

   A. 7 B. 8 C. 9 D. 10 E. 11

3. (CP 2002, Fase 2) Sia f una funzione tale che per ogni $x > 0$ si verifica $f(x)+2f\left(\frac{2002}{x}\right) = 3x$. Il valore di $f(2)$ è:

   A. 1000 B. 2000 C. 3000 D. 4000 E. 6000

4. (CP 2003, Fase 1) Se f è una funzione che verifica $f(xy) = \frac{f(x)}{y}$ per numeri positivi x e y, e $f(500) = 3$, qual è il valore di $f(600)$?

   A. 1 B. 2 C. $\frac{5}{2}$ D. 3 E. $\frac{18}{5}$

5. (IN 2009) Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi. È data una funzione $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che

   - $f(2009 - x) = 2009 - f(x)$;
   - $f(x) \geq x$

   per ogni $x \in \mathbb{Z}$. Quante volte f assume il valore 2009?

   A. Mai B. Un numero finito di volte, ma più di una C. Infinite volte D. Una volta E. Non si può rispondere

Numeri e polinomi

1. (CP 2000, Fase 1) L'ultima cifra del numero $3^{17} + 7^{13}$ è:

   A. 1 B. 6 C. 4 D. 2 E. 0

2. (CP 2004, Fase 1) Il numero

   $$\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{17}+\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{17}-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{17}+\sqrt{10}\right)\left(-\sqrt{5}+\sqrt{17}+\sqrt{10}\right)}$$

   è uguale a:

   A. 5 B. 10 C. 11 D. 14 E. 17

3. (CP 2000, Fase 1) $\sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}}$ è uguale a:

   A. $\frac{\sqrt{13}}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\sqrt{2}$ E. $\sqrt[4]{13}$

4. (CP 2002, Fase 2) Per quanti valori interi positivi di n si verifica che $n^3 - 8n^2 + 20n - 13$ è un numero primo?

   A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. Più di 4

5. (CP 2004, Fase 2) Diciamo che un numero è di *tipo libro* se è uguale alla somma di un numero di due cifre diverse con il numero ottenuto invertendo queste due cifre. Per esempio: 143 è di tipo libro, perché $143 = 85 + 58$. Quanti numeri di tipo libro sono quadrati perfetti?

   A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4

6. (CP 2004, Fase 1) Quanto vale il rapporto $\dfrac{0,\overline{02}}{0,0\overline{2}}$?

   A. $0,01$ B. $0,\overline{01}$ C. $1,1$ D. $0,\overline{10}$ E. $0,\overline{90}$

7. (CP 2000, Fase 2) Tra tutti gli interi positivi x e y tali che $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$, qual è il valore maggiore che può assumere y?

   A. 60 B. 84 C. 96 D. 156 E. 288

8. (CP 2004, Fase 2) Siano d ed e le soluzioni dell'equazione $2x^2 + 3x + 5 = 0$. Quanto vale $(d-1)(e-1)$?

   A. $-\frac{5}{2}$ B. 0 C. 3 D. 5 E. 6

9. (IN 2013) Si sa che l'equazione $x^3 + ax^2 + bx = 1$, nell'incognita x, ammette tre soluzioni reali, una delle quali è diversa da 1 ed è uguale al prodotto delle altre due. Se ne può dedurre che:

   A. $a + b = -2$ B. $a = b$ C. $a = 0$ D. $ab = 1$ E. $a - b = 2$

10. (CP 2002, Fase 2) Sia $P(x) = kx^3 + 2k^2x^2 + k^3$. Calcola la somma di tutti i numeri reali k per i quali $x - 2$ è un fattore di $P(x)$.

    A. -8 B. -4 C. 0 D. 4 E. 8

11. (CP 2003, Fase 1) Se $3^a = 4$, $4^b = 5$, $5^c = 6$, $6^d = 7$, $7^e = 8$ e $8^f = 9$, quanto vale il prodotto $abcdef$?

    A. 1 B. 2 C. $\sqrt{6}$ D. 3 E. $\frac{10}{3}$

12. (CP 2003, Fase 1) Se x e y sono numeri reali tali che $(x^2 - y^2)(x^2 - 2xy + y^2) = 3$ con $x - y = 1$, il valore di xy è

    A. 1 B. $1 + \sqrt{2}$ C. $1 - \sqrt{2}$ D. 1 E. 0

Logaritmi

1. (CP 2000, Fase 1) Se $\log_{b^2} x + \log_{x^2} b = 1$, con $b > 0$, $b \neq 1$ e $x \neq 1$, allora x è uguale a:

   A. $\frac{1}{b^2}$ B. $\frac{1}{b}$ C. b^2 D. b E. $\sqrt{b}$

2. (CP 2000, Fase 2) Qual è il valore della somma $\frac{1}{\log_2 100!}+\frac{1}{\log_3 100!}+\frac{1}{\log_4 100!}+\cdots+\frac{1}{\log_{100} 100!}$?

   A. $0,01$ B. $0,1$ C. 1 D. 2 E. 10

3. (CP 2003, Fase 1) Se log rappresenta il logaritmo decimale (base 10), la somma $\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+\cdots+\log\frac{98}{99}+\log\frac{99}{100}$ è uguale a:

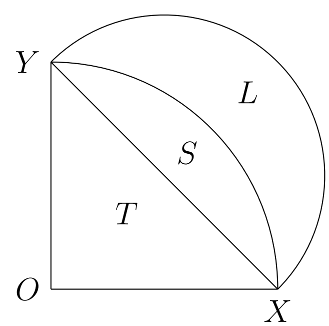
   A. -1 B. 0 C. 1 D. -2 E. 100

4. (CP 2002, Fase 2) Quale delle seguenti affermazioni sull'equazione $\log(3+x)=\log 3+\log x$ nell'incognita x, numero reale positivo, è vera?

   A. Non ammette soluzioni B. È verificata per ogni $x>0$ C. Ha soluzione unica D. Ha due soluzioni E. Ha infinite soluzioni

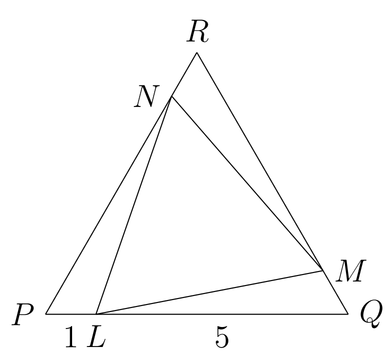
Geometria

1. (CP 2000, Fase 2) Con centro O disegniamo il quadrante OXY, dove XY è a sua volta il diametro del semicerchio mostrato in figura. Se chiamiamo T, S e L le aree delle regioni indicate nella figura, quanto vale il rapporto $\frac{T}{L}$?



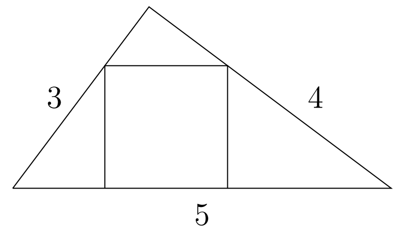
   A. $\frac{3}{\pi}$ B. 1 C. $\frac{13}{4\pi}$ D. $\frac{7}{2\pi}$ E. $\frac{15}{4\pi}$

2. (CP 2000, Fase 2) Quanto vale il quoziente tra l'area del triangolo equilatero grande PQR e l'area del triangolo equilatero piccolo LMN?



   A. $\frac{36}{25}$ B. $\frac{12}{5}$ C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{12}{7}$ E. $\frac{25}{21}$

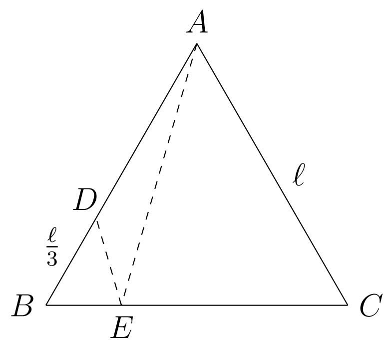
3. (CP 2005, Fase 1) In un triangolo rettangolo di lati 3, 4 e 5 inscriviamo un quadrato, come si vede nella figura.



Quanto misura il lato del quadrato?

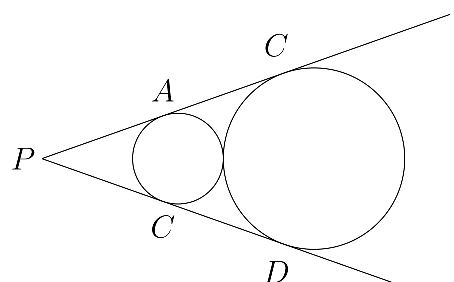
A. $\frac{25}{12}$ B. $\frac{60}{37}$ C. $\frac{30}{13}$ D. 2 E. $\frac{37}{21}$

4. (IN 2013) Un biliardo ha la forma di triangolo equilatero, il cui lato ha lunghezza ℓ. Indicati con A, B, C i tre vertici, sia D il punto del lato AB tale che il segmento BD abbia lunghezza $\frac{\ell}{3}$. Un giocatore indirizza una biglia posta in A verso un punto E del lato del BC. Dopo il rimbalzo, la biglia va a colpire il lato AB in D. Quanto misura il segmento BE?



A. $\frac{\ell}{4}$ B. $\frac{\ell}{5}$ C. $\frac{\ell}{6}$ D. $\frac{\sqrt{3}\ell}{6}$ E. $\frac{\ell}{2}$

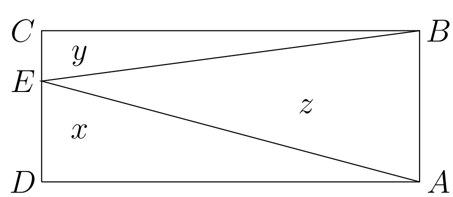
5. (CP 2005, Fase 2) Le due circonferenze in figura sono tangenti esteriormente e le rette PAB e PCD sono le tangenti comuni ad entrambe.



Se $PA = AB = 4$, l'area del cerchio piccolo è:

A. 1.44π B. 2π C. 2.56π D. $\sqrt{8}\pi$ E. 4π

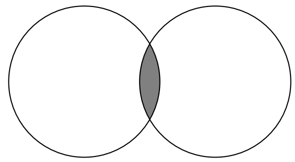
6. (CP 2003, Fase 1) $ABCD$ è un rettangolo ed E è un punto qualsiasi del lato CD. Indichiamo con x l'area del triangolo AED, con y l'area del triangolo BCE e con z l'area del triangolo ABE.



Se $y^2 = xz$, allora il valore del quoziente $\dfrac{DE}{EC}$ è

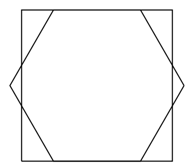
A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ E. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. (CP 2003, Fase 2) I centri di due cerchi di raggio 6 distano tra loro $6\sqrt{3}$. Qual è l'area della regione comune a entrambi i cerchi?



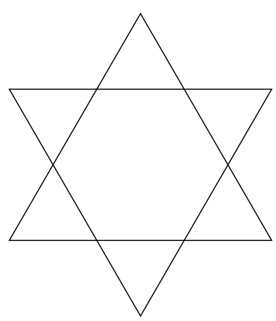
A. $2\pi - \sqrt{3}$ B. $6\pi - 4\sqrt{3}$ C. $6\pi - 12\sqrt{3}$ D. $12\pi - 18\sqrt{3}$ E. $12\pi - 24\sqrt{3}$

8. (CP 2002, Fase 2) A partire da un quadrato di lato 1 cm, costruiamo un esagono regolare come indica la figura. Quanto vale l'area, in cm^2, della regione comune ad entrambe le figure?



A. $\frac{2}{\sqrt{3}} - 1$ B. $1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ C. $2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

9. (IN 2009) Sia n un intero maggiore di 4. La n-stella regolare si ottiene, a partire da un poligono regolare di n lati, prolungando ciascun lato fino alla prima intersezione con il prolungamento di un altro dei lati. In figura è illustrato il caso $n = 6$.



Per quale valore di n la somma degli angoli delle punte della n-stella regolare è il doppio della somma degli angoli delle punte della 6-stella regolare?

A. Per nessun valore di n B. 10 C. 9 D. 8 E. 12

10. (CP 2004, Fase 1) In un triangolo rettangolo di lati interi consideriamo i seguenti segmenti:

- l'altezza relativa all'ipotenusa;
- la mediana relativa all'ipotenusa;
- il raggio della circonferenza circoscritta;
- il raggio della circonferenza inscritta.

Quanti di tali segmenti hanno misure razionali?

A. Tutti B. Nessuno C. 3 D. 2 E. 1

Probabilità

1. (CP 2002, Fase 2) Un'urna contiene biglie bianche, biglie nere, dadi bianchi e dadi neri. Il 20% degli oggetti nell'urna sono dadi e il 40% delle biglie sono bianche. Che percentuale degli oggetti nell'urna sono biglie nere?

   A. 40% B. 48% C. 52% D. 60% E. 80%

2. (CP 2003, Fase 1) Lanciamo tre dadi. Qual è la probabilità che la somma dei numeri comparsi in due di essi coincida con il numero del terzo dado?

   A. $\frac{5}{36}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{7}{36}$ D. $\frac{2}{9}$ E. $\frac{5}{24}$

3. (CP 2004, Fase 2) Scegliamo a caso un punto (x, y) del rettangolo di vertici $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 1)$ e $(0, 1)$. Qual è la probabilità che x sia minore di y?

   A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{1}$ E. $\frac{3}{4}$

4. (CP 2002, Fase 2) Se il numero di ragazzi nella classe è $\frac{2}{3}$ del numero delle ragazze, che percentuale di ragazzi c'è in classe?

   A. 25% B. 33% C. 40% D. 45% E. 48%

5. (IN 2013) In un certo paese i commercianti pagano una tassa del 23% (del prezzo di vendita) su ciascun prodotto. Un giorno la tassa viene portata al 30%. Un commerciante decide allora di aumentare i prezzi dei prodotti, in modo da mantenere, per ogni prodotto, al netto delle tasse, lo stesso ricavo che aveva in precedenza. Di che percentuale deve aumentare i prezzi di vendita?

   A. 10% B. 8% C. 7% D. 9% E. 14%

Varie

1. (CP 2003, Fase 1) Se $x = 11°$, il valore di $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x$ è

   A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ D. 1 E. 0

2. (CP 2003, Fase 1) Ciascuna delle seguenti affermazioni può essere vera o falsa:

   1. Le affermazioni 3 e 4 sono entrambe vere
   2. Le affermazioni 4 e 5 non sono entrambe false
   3. L'affermazione 1 è vera
   4. L'affermazione 3 è falsa
   5. Le affermazioni 1 e 3 sono entrambe false

   Quante affermazioni, tra queste cinque, sono vere?

   A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4

3. (IN 2013) L'affermazione "nello scorso campionato tutte le attaccanti hanno segnato almeno 4 gol" è falsa. Questo significa che, nel corso del campionato:

   A. tutte le attaccanti hanno segnato meno di 4 gol B. almeno un'attaccante ha segnato meno di 4 gol C. almeno un'attaccante ha segnato più di 4 gol D. tutte le attaccanti hanno segnato più di 4 gol E. almeno un'attaccante ha segnato almeno 4 gol

4. (CP 2003, Fase 1) Antonio guida la sua macchina a velocità costante. Alle 14:00 si trova a xyz km da casa sua, dove x, y e z sono cifre tali che $x \geq 1$ e $y = 0$. Alle 14:18 si trova a zx km da casa sua, e alle 15:00 a xz km da casa sua. A che ora arriverà a casa Antonio?

   A. 15:10 B. 15:12 C. 15:24 D. 15:30 E. 15:48

5. (CP 2003, Fase 2) Ciascuno dei componenti della famiglia di Luigi fa colazione con la stessa quantità di caffelatte, ma la proporzione tra caffé e latte varia in ogni tazza. Se Luigi ha utilizzato un quarto della quantità totale di latte e un sesto della quantità totale di caffé, quanti componenti ha la famiglia di Luigi?

   A. 3 B. 4 C. 5 D. 6 E. 7

Legenda

CP Problemi del *Concurso primavera*, disponibili su

https://www.concursoprimavera.es/#concurso

IN Problemi tratti dalle prove d'ingresso INdAM, disponibili su https://www.altamatematica.it/prove-anni-precedenti/