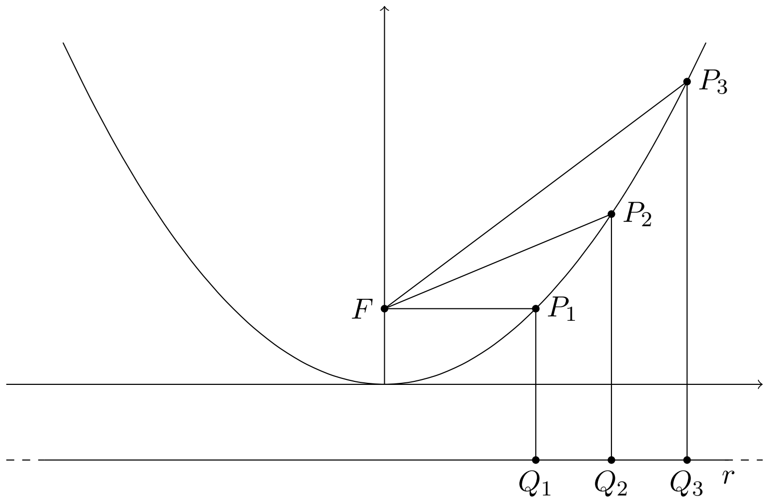
Attività integrativa: specchi parabolici

Una *parabola* $\mathcal{P}$ nel piano cartesiano è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso F, detto *fuoco* e da una retta fissa r, detta *direttrice*.
Se indichiamo con $d(P, F)$ e $d(P, r)$ la distanza tra un punto P e, rispettivamente, il fuoco F e la direttrice r, abbiamo che

$$\mathcal{P} = \{P \mid d(P, F) = d(P, r)\} .$$

Ricaviamo ora l'equazione cartesiana della parabola $\mathcal{P}$ con fuoco $F = (0, 1)$ e direttrice la retta $r = \{(x, y) \mid y + 1 = 0\}$.

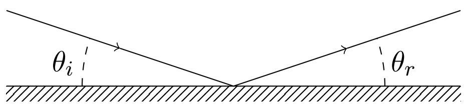


Attività 1 Verifica che

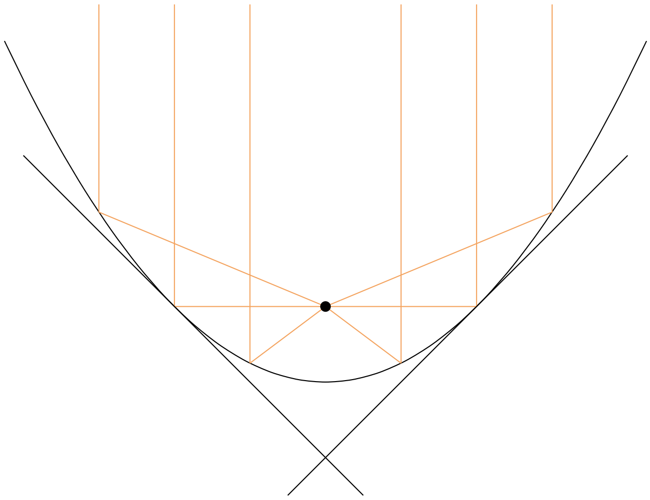
$$\mathcal{P} = \left\{(x, y) \mid y = \frac{1}{4}x^2\right\} .$$

Supponiamo ora di ruotare la parabola $\mathcal{P}$ intorno all'asse verticale, creando così una *superficie parabolica*, o *paraboloide*. Sezionando tale paraboloide con un qualsiasi piano che contiene l'asse delle ordinate, otteniamo una parabola identica a $\mathcal{P}$.
Immaginiamo che la superficie interna del paraboloide sia uno specchio e consideriamo dei raggi luminosi, tutti paralleli all'asse delle ordinate, che colpiscono la superficie parabolica e vengono riflessi. Vogliamo dimostrare che, una volta riflessi, tutti i raggi passano per il fuoco.
La *legge di riflessione* afferma che un raggio incidente su uno specchio viene riflesso e continua il suo cammino in modo che

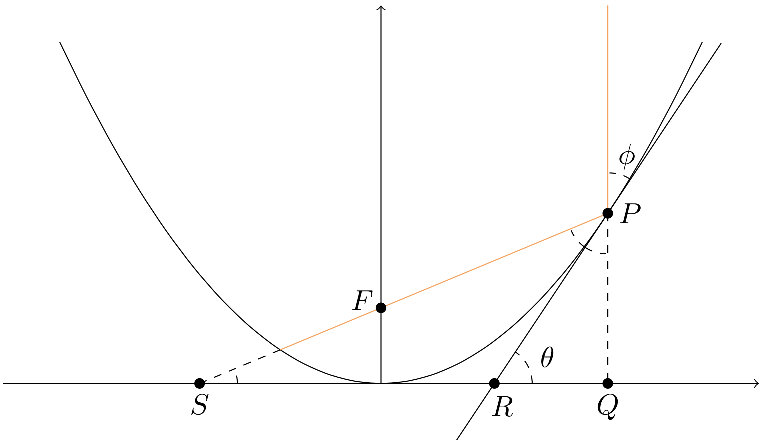
- il raggio incidente e quello riflesso giacciano nello stesso piano;
- l'angolo tra il raggio incidente e lo specchio sia uguale all'angolo tra il raggio riflesso e lo specchio.



Applichiamo questa legge alla nostra situazione. Anzitutto, un raggio incidente, che è parallelo all'asse delle ordinate, determina, insieme a tale asse, un piano; questo piano taglia il paraboloide in una parabola identica a $\mathcal{P}$. La prima parte della legge di riflessione implica che il raggio riflessi giace in tale piano. Ci possiamo dunque ricondurre a studiare una singola parabola, $\mathcal{P}$.



Per applicare la seconda parte della legge di riflessione, basta notare che, per uno specchio non rettilineo, l'angolo di incidenza (o di riflessione) è, per definizione, l'angolo formato tra il raggio incidente (o riflesso) e la *retta tangente* allo specchio.
Consideriamo dunque un raggio incidente, parallelo all'asse delle ordinate.



Sia ϕ l'ampiezza dell'angolo tra il raggio incidente e la retta tangente a $\mathcal{P}$ in $P = \left(x_0, \frac{1}{4}x_0^2\right)$, generico punto della parabola. Per la legge di riflessione, anche l'angolo $\widehat{SPR}$ è uguale a ϕ. L'angolo $\widehat{RPQ}$ misura anch'esso ϕ, dunque, ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo è π, otteniamo che $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$, dunque $\psi = \frac{\pi}{2} - 2\phi = 2\theta - \frac{\pi}{2}$.
Il coefficiente angolare della retta tangente a $\mathcal{P}$ in P è $\tan\theta$, mentre il coefficiente angolare della retta che contiene il raggio riflesso è $\tan\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.

Attività 2 Applicando le formule di somma, sottrazione e duplicazione di seno e coseno, verifica che

$$\tan\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\tan^2\theta - 1}{2\tan\theta}.$$

Di conseguenza, se sappiamo calcolare $\tan\theta$, ovvero la pendenza della retta tangente a $\mathcal{P}$ in P, possiamo ricavare $\tan\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)$, ovvero la pendenza della retta che contiene il raggio riflesso, e verificare che passa per il fuoco F.

Attività 3 Verifica che il coefficiente angolare della retta tangente a $\mathcal{P}$ in P è $m = \frac{x_0}{2}$.

Abbiamo dunque $\tan\theta = m = \frac{x_0}{2}$, dunque il coefficiente angolare della retta che contiene il raggio riflesso è

$$\tan\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\tan^2\theta - 1}{2\tan\theta} = \frac{\frac{x_0^2}{4} - 1}{x_0} = \frac{x_0^2 - 4}{4x_0}.$$

Finalmente, l'equazione della retta che contiene il raggio riflesso è

$$y = \frac{x_0^2 - 4}{4x_0}(x - x_0) + \frac{1}{4}x_0^2\,,$$

ed è immediato vedere che $F = (0, 1)$ appartiene a questa retta.