Attività integrativa: π

Tra i numeri che si incontrano fin da piccoli, alle elementari, ce n'è uno alquanto misterioso:

$$\pi = 3,141592653589\ldots$$

Dopo aver calcolato il perimetro di triangoli, quadrati, rettangoli, trapezi e altri oggetti *diritti*, ci si cimenta con il perimetro di un cerchio di raggio r. È qui che fa la sua comparsa π: più precisamente nella formula

$$\ell = 2\pi r\,, \tag{1}$$

dove ℓ è la lunghezza della circonferenza. A pensarci bene, la formula (1) può essere presa come *definizione* di π. In questo senso, π è definito come il rapporto tra la lunghezza della circonferenza, ℓ, e il doppio del raggio del cerchio, $2r$:

$$\pi = \frac{\ell}{2r}\,. \tag{2}$$

In altre parole, π è definito come la *costante di proporzionalità* tra la lunghezza di una circonferenza di raggio r e il doppio del raggio.

Dal punto di vista pratico, cioè per calcolare effettivamente la lunghezza di una certa circonferenza di cui è noto il raggio, si usa l'approssimazione $\pi \approx 3,14$. È però un fatto degno di nota che π è un numero con infinite cifre decimali, non periodico; un altro numero di questo tipo è $\sqrt{2}$: entrambi sono numeri irrazionali, cioè non sono frazioni. Da un certo punto di vista, tuttavia, π è ancora più selvaggio di $\sqrt{2}$. In effetti, $\sqrt{2}$ è radice di un polinomio di grado 2, $p(x) = x^2 - 2$. Con questo intendo dire che $p\left(\sqrt{2}\right) = 0$, e questo è vero praticamente per definizione. Nel 1882, tuttavia, Lindemann dimostrò che π è *trascendente*, ovvero non è radice di nessun polinomio. La storia di π è, in un certo senso, la storia della Matematica. Rimando la lettrice o il lettore interessati alla voce Pi di Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Pi.

Sempre alle elementari impariamo che l'area $\mathcal{A}$ di un cerchio di raggio r obbedisce alla formula

$$\mathcal{A} = \pi r^2\,.$$

Da quest'ultima formula possiamo ricavare π:

$$\pi = \frac{\mathcal{A}}{r^2}\,,$$

ovvero π è il rapporto tra l'area di un cerchio di raggio r e il quadrato del raggio, o ancora che π è la costante di proporzionalità tra l'area di un cerchio di raggio r e il quadrato del raggio.

Risulta come minimo curioso che queste due costanti di proporzionalità siano la stessa. Consideriamo ad esempio un triangolo equilatero: come un cerchio è completamente determinato dalla lunghezza del suo raggio, così un triangolo equilatero è completamente determinato dalla lunghezza del lato. In un triangolo equilatero di lato a il perimetro è $3a$, mentre l'area è $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Quindi, per un triangolo equilatero, il rapporto tra perimetro e lato è 3, mentre il rapporto tra area e quadrato del lato è $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, che è ben diverso da 3! Se consideriamo un quadrato di lato a, il suo perimetro è $4a$, mentre la sua area è a^2: per un quadrato il rapporto tra perimetro e lato è 4, mentre il rapporto tra area e quadrato del lato è 1!

L'obiettivo di questa attività è chiarire questa coincidenza curiosa:

> Perchè π, definito come rapporto tra circonferenza e doppio del raggio, è anche il rapporto tra l'area del cerchio e il quadrato del raggio?

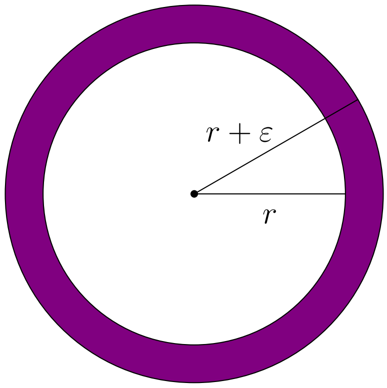
Prendiamo (2) come definizione di π e introduciamo una costante c che rappresenta (temporaneamente!) il rapporto tra l'area di un cerchio di raggio r e il quadrato del raggio:

$$c = \frac{\mathcal{A}}{r^2}\,.$$

L'obiettivo è dimostrare che $c = \pi$. Vedremo due modi di giustificare questo fatto quantomeno misterioso: entrambi hanno un aspetto geometrico e uno analitico, e fanno appello, in modo intuitivo, al concetto di *limite*.

Il primo metodo

Consideriamo due cerchi concentrici, il primo di raggio r, e il secondo di raggio $r+\varepsilon$, dove ε è un qualsiasi numero positivo.



L'area del cerchio di raggio $r+\varepsilon$ è allora

$$\mathcal{A}_1 = c(r+\varepsilon)^2\,,$$

mentre l'area del cerchio di raggio r è

$$\mathcal{A}_2 = cr^2\,.$$

L'area della corona circolare compresa tra questi due cerchi è allora

$$\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 = c\left((r+\varepsilon)^2 - r^2\right) = c(2r\varepsilon + \varepsilon^2)\,.$$

L'area della corona circolare coincide quindi con l'area di un rettangolo di base $2c\left(r+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ e di altezza ε:

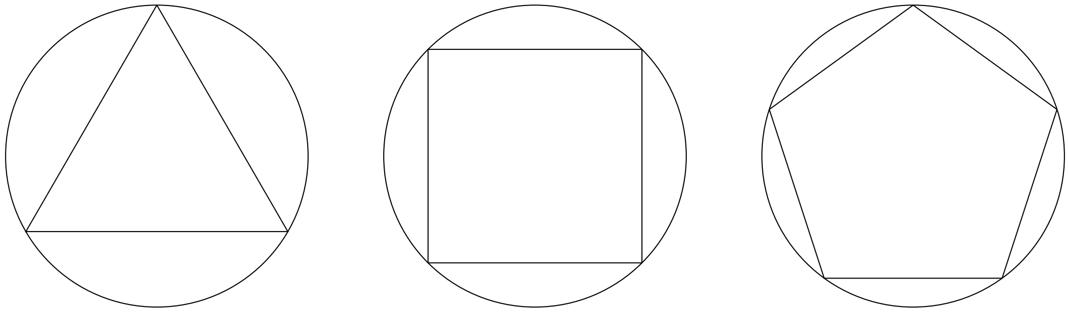
Consideriamo corone circolari via via più sottili, che possiamo interpretare come rettangoli di altezza e base via via più piccole. Quando ε tende a 0, il rettangolo collassa sulla sua base, che, nel limite, è lunga

$$2c\left(r+\frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 2cr\,.$$

Allo stesso modo, la corona circolare collassa sulla circonferenza interna, che ha lunghezza $2\pi r$. Ma allora $2cr = 2\pi r$, dunque $c = \pi$.

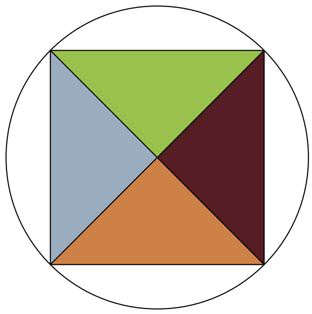
Il secondo metodo

Fissiamo una circonferenza di raggio r; al variare di $n \geq 3$ consideriamo il poligono regolare R_n di n lati inscritto nella circonferenza:

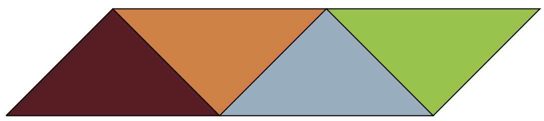


R_3 R_4 R_5

Consideriamo ad esempio R_4. Il quadrato può essere suddiviso in 4 triangoli equivalenti, con un vertice comune nel centro della circonferenza:



Disponiamo i 4 triangoli in questo modo, a formare un parallelogramma:



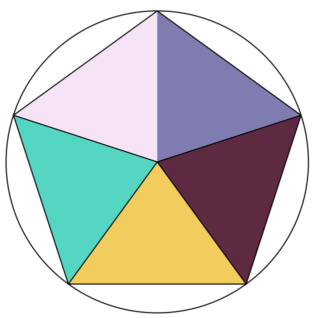
L'area di R_4 coincide quindi con l'area del parallelogramma in figura. Ricordo che l'area di un parallelogramma di base b e altezza h è

$$\mathcal{A} = bh\,.$$

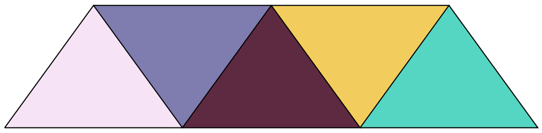
Se a_4 è la lunghezza del lato di R_4, allora la base del parallelogramma è $2a_4$, e l'area del quadrato può essere riscritta come

$$\mathcal{A}_4 = 2a_4h = \frac{4a_4h}{2}\,.$$

Il pentagono regolare R_5 può essere suddiviso in 5 triangoli equivalenti:



Disponiamo i cinque triangoli in modo tale da formare un trapezio:



L'area del pentagono R_5 coincide quindi con l'area del trapezio in figura. Ricordo che l'area di un trapezio con base maggiore B, base minore b e altezza h è

$$\mathcal{A} = \frac{(B+b)h}{2}\,.$$

Se a_5 è la lunghezza del lato di R_5, allora l'area del pentagono può essere riscritta come

$$\mathcal{A}_5 = \frac{(3a_5 + 2a_5)h}{2} = \frac{5a_5 h}{2}\,.$$

Consideriamo ora un poligono regolare R_n con un numero qualsiasi di lati.

- Se n è pari, disponiamo gli n triangoli da cui è constituito R_n in un parallelogramma, come abbiamo fatto per il quadrato.
- Se n è dispari, disponiamo gli n triangoli da cui è constituito R_n in un trapezio, come abbiamo fatto per il pentagono.

Attività 1 Sia a_n la lunghezza del lato di R_n e sia h_n l'altezza di uno degli n triangoli in cui viene suddiviso R_n. Verifica che vale la formula

$$\mathcal{A}_n = \frac{n a_n h_n}{2}\,. \tag{3}$$

Usando un po' di trigonometria si possono ricavare il lato a_n e l'altezza h_n di uno di questi n triangoli da cui è formato R_n in funzione del raggio della circonferenza in cui R_n è inscritto.

Attività 2 Dimostra che valgono le seguenti formule:

$$a_n = 2r\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \qquad h_n = r\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Mettendo insieme questi due fatti otteniamo una formula per l'area del poligono regolare R_n:

$$\mathcal{A}_n = nr^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\,.$$

Torniamo alla formula (3): il prodotto na_n è uguale al perimetro di R_n, che denotiamo con p_n. Otteniamo quindi una formula che lega l'area $\mathcal{A}_n$ al perimetro p_n del poligono regolare R_n:

$$\mathcal{A}_n = \frac{1}{2} p_n h_n\,. \tag{4}$$

Consideriamo ora poligoni inscritti R_n con un numero n di lati sempre maggiore. All'aumentare di n,

- p_n tende alla lunghezza della circonferenza in cui R_n è inscritto, che è uguale a $2\pi r$;
- h_n tende al raggio r: infatti, per n sempre più grande $\frac{\pi}{n}$ si approssima sempre di più a 0, e $\cos(0) = 1$.
- $\mathcal{A}_n$ tende all'area del cerchio in cui R_n è inscritto, che è (temporaneamente!) uguale a cr^2.

Inserendo queste informazioni nella formula (4) vediamo che, al crescere del numero n dei lati di R_n, il lato sinistro tende verso cr^2, mentre il lato destro tende verso $\frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$. Nel limite, ovvero quando n cresce oltre ogni limite, $cr^2 = \pi r^2$, e otteniamo ancora $c = \pi$.